LEHRSTUHL A FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. E. Görlich,
Dipl.-Math. T. Heck, I. Klöcker

Aachen, den 17. Juli 2003

12. Übung zur Analysis IV

Abgabe: Freitag, 25. Juli 2003, bis 12.00 Uhr im Kasten vor Raum 155, Hauptgebäude

Aufgabe 1 (3+3 Punkte)
Bestimmen Sie für die folgenden Funktionen alle isolierten Singularitäten, deren Typ, die Laurent-Entwicklungen um diese Singularitäten sowie den Konvergenzbereich der Entwicklungen:

a) $$\frac{z^2 e^{-1/z}}{(z-1)^3},$$ b) $$\frac{\mathrm{Log}(1+z)}{\sin(\pi z)}.$$

Aufgabe 2 (4+2 Punkte)
Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen mit $a \in U$, und die holomorphe Funktion $f : U \setminus \{a\} \to \mathbb{C}$ habe in a eine isolierte Singularität. Weiter existiere ein $m \in \mathbb{Z}$, so dass die Funktion

$$g(z) = (z-a)^m f(z)$$

eine in a hebbare Singularität habe.

a) Zeigen Sie: Wenn f in keiner Umgebung von a identisch verschwindet, dann gibt es eine kleinste ganze Zahl $k \in \mathbb{Z}$, so dass
$$z \mapsto (z-a)^k f(z)$$
eine hebbare Singularität in a hat.

b) Sei k die nach a) eindeutig bestimmte ganze Zahl. Wir definieren die *Ordnung* $\mathrm{ord}(f;a)$ *von* f *in* a durch $\mathrm{ord}(f;a) := -k$. Zeigen Sie:
   (i) $\mathrm{ord}(f;a) \geq 0 \iff a$ ist hebbar.
   (ii) $\mathrm{ord}(f;a) = 0 \iff a$ ist hebbar und $f(a) \neq 0$.
   (iii) $\mathrm{ord}(f;a) > 0 \iff a$ ist hebbar und $f(a) = 0$.
   (iv) $\mathrm{ord}(f;a) < 0 \iff a$ ist ein Pol der Vielfachheit $-\mathrm{ord}(f;a)$.

Aufgabe 3 (3+4 Punkte)

a) Klassifizieren Sie alle isolierten Singularitäten der Funktion
$$g(z) = \frac{z}{\exp(z)-1}.$$

b) Beweisen Sie die Identität $g(z) - g(-z) = -z$ und zeigen Sie mit Hilfe dieser Identität, dass die Laurent-Entwicklung von g um 0 die Form
$$g(z) = B_0 + B_1 z + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{B_{2k}}{(2k)!} z^{2k}$$
mit $B_k \in \mathbb{Q}$, $B_0 = 1$, $B_1 = -1/2$ hat. Diese B_k heißen *Bernoulli-Zahlen*.

Aufgabe 4 (6 Punkte)
Sei $n \geq 0$ und p ein komplexes Polynom n-ten Grades, d. h.

$$p : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, z \mapsto \sum_{k=0}^{n} c_k z^k, \quad c_k \in \mathbb{C}, c_n \neq 0.$$

Sei außerdem $a \in \mathbb{C}$ und $f : \mathbb{C} \setminus \{a\} \to \mathbb{C}$ holomorph.

Bestimmen Sie, welche Art von Singularität $p(f)$ in a besitzt, falls f in a

(i) eine hebbare Singularität,

(ii) einen Pol der Ordnung $l \geq 1$ oder

(iii) eine wesentliche Singularität

hat.

Aufgabe 5 (3 Punkte)
Zeigen Sie: Ist f auf dem Gebiet $G \subset \mathbb{C}$ meromorph und nicht konstant, so ist $f(G)$ offen in $\hat{\mathbb{C}}$.