LEHRSTUHL A FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. E. Görlich,
Dipl.-Math. T. Heck, I. Klöcker

Aachen, den 23. Juli 2003

Musterlösung der 11. Übung zur Analysis IV

Aufgabe 2 (5 Punkte) Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f : G \to \mathbb{C}$ holomorph auf G mit $f(z) \neq 0$ für alle $z \in G$. Zeigen Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen:

(i) $\dfrac{f'}{f}$ hat eine Stammfunktion auf G.

(ii) Es existiert ein holomorpher Logarithmus von f auf G.

Lösung

(i)⇒(ii) (vgl. Beweis zu XIX (4.6)) Sei $a \in G$ und g eine Stammfunktion von f'/f auf G mit $g(a) = \operatorname{Log} f(a)$. Definiere

$$h(z) := f(z)e^{-g(z)}.$$

Damit gilt:

$$h'(z) = f'(z)e^{-g(z)} - f(z)e^{-g(z)}g'(z) = 0 \quad \text{für alle } z \in G, \text{ denn } g'(z) = f'(z)/f(z).$$

Also ist $h \equiv c$ konstant auf G. Der Funktionswert berechnet sich zu

$$h(z) = h(a) = f(a)e^{-\operatorname{Log} f(a)} = 1 \quad \text{für alle } z \in G.$$

Damit gilt $\exp \circ g = f$, g ist also ein holomorpher Logarithmus von f auf G.

(ii)⇒(i) Sei g ein holomorpher Logarithmus von f, d. h.

$$f = \exp \circ g.$$

Dann gilt für die Ableitung von f:

$$f' = (\exp \circ g) \cdot g' = f \cdot g'.$$

Daraus folgt die Behauptung, $f'/f = g$.

Aufgabe 3 (3 Punkte) Es sei $z = re^{i\theta} \neq 0$ mit $\theta \in (-\pi, \pi]$. Bestimmen Sie den Hauptwert von z^i. Welches ist der Hauptwert von i^i?

Lösung Sei $z = re^{i\theta}$ mit $-\pi < \theta \leq \pi$ und $r > 0$. Der Hauptwert von z^i ist definiert als

$$z^i := e^{i \operatorname{Log} z} \quad \text{mit dem Hauptzweig Log des Logarithmus.}$$

Also ist

$$z^i = e^{i(\log r + i\theta)} = e^{-\theta + i \log r}.$$

Für i^i gilt insbesondere mit $r = 1$ und $\theta = \frac{\pi}{2}$:

$$i^i = e^{-\frac{\pi}{2}}.$$

Aufgabe 4 (5 Punkte) Entwickeln Sie die Funktion $f(z) = \dfrac{1}{z^2 - 5z + 6}$ in eine Laurent-Reihe in den Kreisringen

a) $0 < |z| < 2$, b) $2 < |z| < 3$, c) $3 < |z|$.

Lösung Zunächst die Partialbruchzerlegung von f:

$$f(z) = \frac{1}{z^2 - 5z + 6} = \frac{1}{(z-2)(z-3)} = \frac{-(z-3)+(z-2)}{(z-2)(z-3)} = \frac{1}{z-3} - \frac{1}{z-2} = \frac{1}{2-z} - \frac{1}{3-z}.$$

Für $z_0 \in \mathbb{C}$ gilt (geometrische Reihe):

$$\frac{1}{z_0 - z} = \begin{cases} \dfrac{1}{z_0} \dfrac{1}{1 - \frac{z}{z_0}} = \dfrac{1}{z_0} \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{z_0}\right)^n, & \text{falls } |z| < |z_0|, \\ -\dfrac{1}{z} \dfrac{1}{1 - \frac{z_0}{z}} = -\dfrac{1}{z} \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z_0}{z}\right)^n, & \text{falls } |z| > |z_0|. \end{cases}$$

Damit folgt:

a)

$$f(z) = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{2}\right)^n - \frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{3}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(2^{-n-1} - 3^{-n-1}\right) z^n$$

im Fall $0 < |z| < 2$.

b)

$$\begin{aligned} f(z) &= -\frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{z}\right)^n - \frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{3}\right)^n = -\frac{1}{z} \sum_{n=-\infty}^{0} \left(\frac{z}{2}\right)^n - \sum_{n=0}^{\infty} 3^{-n-1} z^n \\ &= -\sum_{n=-\infty}^{-1} 2^{-n-1} z^n - \sum_{n=0}^{\infty} 3^{-n-1} z^n = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n \end{aligned}$$

mit

$$a_n := \begin{cases} -2^{-n-1}, & n \leq -1 \\ 3^{-n-1}, & n \geq 0 \end{cases}$$

für $2 < |z| < 3$.

c)

$$f(z) = -\frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{z}\right)^n + \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3}{z}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \left(3^{n-1} - 2^{n-1}\right) z^{-n}$$

für $|z| > 3$.