LEHRSTUHL A FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. E. Görlich,
Dipl.-Math. T. Heck, I. Klöcker

Aachen, den 3. Juli 2003

10. Übung zur Analysis IV

Abgabe: Freitag, 11. Juli 2003, bis 12.00 Uhr im Kasten vor Raum 155, Hauptgebäude

Aufgabe 1 (4 Punkte) Sei $D \subset \mathbb{C}$ offen. Zeigen Sie: Jede Wegzusammenhangskomponente von D ist ein Gebiet in $\mathbb{C}$ und es gibt höchstens abzählbar unendlich viele Wegzusammenhangskomponenten von D.

Aufgabe 2 (3 Punkte) Zeigen Sie: Für eine nichtleere offene Menge $D \subset \mathbb{C}$ sind äquivalent:

(i) D ist zusammenhängend, also ein Gebiet.

(ii) Die Algebra $\mathcal{H}(D)$ ist ein Integritätsring.

Aufgabe 3 (2+2+2 Punkte) Welche der folgenden Mengen sind einfach zusammenhängende Gebiete?

a) $\{z \in \mathbb{C};\ \mathrm{Re}(z) = 0, |\mathrm{Im}(z)| \leq 1\}^C \cap \{z \in \mathbb{C};\ \mathrm{Re}(z) > 0, \mathrm{Im}(z) = \cos \dfrac{1}{\mathrm{Re}(z)}\}^C$

b) Das Komplement einer logarithmischen Spirale um 0, also

$$\mathbb{C}^* \setminus \{z \in \mathbb{C};\ z = e^{t(2+i)} \text{ mit } t \in \mathbb{R}\}.$$

c) $\{z \in \mathbb{C};\ |z| < 1\} \cap \{-\frac{1}{n};\ n \in \mathbb{N}\}^C \setminus \{0\}$.

Aufgabe 4 (2+2 Punkte) Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen:

a) Sind $G, G' \subset \mathbb{C}$ einfach zusammenhängende Gebiete mit $G \cap G' \neq \emptyset$, dann ist $G \cup G'$ einfach zusammenhängend.

b) Ist $(G_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge einfach zusammenhängender Gebiete in $\mathbb{C}$ mit $G_n \subset G_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$, dann ist $\bigcup_{n=1}^{\infty} G_n$ einfach zusammenhängend.

Aufgabe 5 (3 Punkte) Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet, $f : G \to \mathbb{C}$ holomorph und nullstellenfrei, $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass dann f genau n holomorphe n-te Wurzeln besitzt, d. h. es existieren genau n holomorphe Funktionen $g : G \to \mathbb{C}$ mit $(g(z))^n = f(z)$ für alle $z \in G$.

Aufgabe 6 (6 Punkte) Die hyperbolischen Funktionen der Ordnung $n \in \mathbb{N}$ werden für $z \in \mathbb{C}$ und $j \in \{1, \ldots, n\}$ definiert durch

$$h_j(z;n) := \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial K_2(0)} \frac{w^{n-j} e^{wz}}{w^n - 1}\, dw.$$

Zeigen Sie, dass

$$h_j(z;n) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{kn+j-1}}{(kn+j-1)!}.$$

Welche Funktionen erhält man für $n = 1$ und $n = 2$?