LEHRSTUHL A FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. E. Görlich,
Dipl.-Math. T. Heck, I. Klöcker

Aachen, den 26. Juni 2003

9. Übung zur Analysis IV

Abgabe: Freitag, 4. Juli 2003, bis 12.00 Uhr im Kasten vor Raum 155, Hauptgebäude

Aufgabe 1 (3 Punkte) Beweisen Sie die folgende l'Hospitalsche Regel: Für zwei in z_0 differenzierbare Funktionen $f, g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit $f(z_0) = g(z_0) = 0$ und $g'(z_0) \neq 0$ gilt

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{f'(z_0)}{g'(z_0)}.$$

Aufgabe 2 (3+3+3+1 Punkte)
Sei $D := \{z \in \mathbb{C};\ z \neq -k,\ k \in \mathbb{N}_0\}$, und auf D sei die folgende Funktion gegeben:

$$f : D \to \mathbb{C},\ z \mapsto \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k!(z+k)} + \int_1^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt.$$

Zeigen Sie:

a) $f(z)$ existiert für alle $z \in D$.

b) f ist auf D holomorph.

c) $f(z)$ stimmt für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $\mathrm{Re}(z) > 0$ mit der komplexen Gammafunktion $\Gamma(z)$ überein.

d) Es gilt $f(z+1) = z f(z)$ für alle $z \in D$.

Aufgabe 3 (3 Punkte) Zeigen Sie: Für ein offenes Dreieck Δ gilt:

$$n_{\partial\Delta}(z) = \begin{cases} 1, & z \in \Delta \\ 0, & z \in \mathbb{C} \setminus \overline{\Delta}. \end{cases}$$

Aufgabe 4 (4 Punkte) Sei γ ein geschlossener Weg in $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ und sei $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ gegeben durch $g(z) = z^k$, $k \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie:

$$n_{g \circ \gamma}(0) = k\, n_\gamma(0).$$

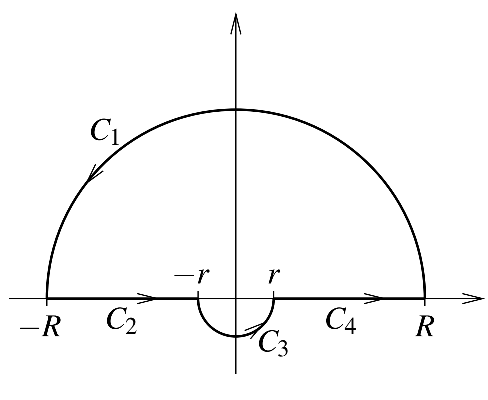
Aufgabe 5 (6 Punkte) Berechnen Sie das reelle uneigentliche Riemann-Integral $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx$.

Anleitung: Betrachten Sie das komplexe Kurvenintegral $\int_C f(z)\, dz$, wobei $f : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}, z \mapsto \frac{e^{iz}}{z}$ und $C = C_1 + C_2 + C_3 + C_4$ die skizzierte Kurve sei. Berechnen Sie $\int_C f(z)\, dz$ mittels der allgemeinen Cauchyschen Integralformel und zeigen Sie:

$$\int_{C_2 + C_4} \frac{e^{iz}}{z}\, dz = 2i \int_r^R \frac{\sin x}{x}\, dx,$$

$$\lim_{R \to \infty} \int_{C_1} \frac{e^{iz}}{z}\, dz = 0,$$

$$\lim_{r \to 0} \int_{C_3} \frac{e^{iz}}{z}\, dz = \pi i.$$



Aufgabe 6 (Für Lehramtskandidaten zum Vorrechnen)

a) Sei $K_R(0) \subset U \subset \mathbb{C}$, U offen und $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph mit Ausnahme endlich vieler Punkte $z_1, z_2, \dots, z_n \in U$. Alle diese Punkte sollen innerhalb des geschlossenen Weges $\partial K_R(0) \subset U$ liegen. Zeigen Sie: Es existieren n disjunkte Kreisscheiben $K_{r_j}(z_j)$ mit

$$\int_{\partial K_R(0)} f(z)\, dz = \sum_{j=1}^{n} \int_{\partial K_{r_j}(z_j)} f(z)\, dz.$$

b) Berechnen Sie das Integral

$$\int_{\partial K_3(0)} \frac{z^2 - z + 3}{(z+2)(z-1)^2}\, dz.$$