LEHRSTUHL A FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. E. Görlich,
Dipl.-Math. T. Heck, I. Klöcker

Aachen, den 18. Juni 2003

8. Übung zur Analysis IV

Abgabe: Freitag, 27. Juni 2003, bis 12.00 Uhr im Kasten vor Raum 155, Hauptgebäude

Aufgabe 1 (2+4 Punkte)

a) Bestimmen Sie für alle $w \in \mathbb{C}$ die w-Stellen mit Vielfachheit von $\operatorname{Log} : \mathbb{C}_- \to \mathbb{C}$.

b) Sei $n \in \mathbb{N}$ und sei $f_n : D_n \to \mathbb{C}$ gegeben durch

$$f_n(z) = \left(\frac{z \cos z}{\sinh z}\right)^n \frac{1 - \cos iz}{e^z - 1},$$

wobei D_n der maximale Definitionsbereich von f_n sei. Bestimmen Sie die größte Menge $\hat{D}_n$ auf die f_n holomorph fortsetzbar ist und bestimmen Sie die Nullstellen und ihre Ordnung der holomorphen Fortsetzungen $\hat{f}_n : \hat{D}_n \to \mathbb{C}$ von f_n auf $\hat{D}_n$.

Aufgabe 2 (4+2+2 Punkte)

a) Sei $f : \overline{K_1(0)} \to \mathbb{C}$ stetig und auf $K_1(0)$ holomorph. Weiter sei

$$f(\tfrac{1}{n}) = \tfrac{1}{n^2} - \tfrac{3}{n} + 2 \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Bestimmen Sie das Maximum von $|f|$ auf $\overline{K_1(0)}$.

b) Finden Sie alle ganzen Funktionen $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit

$$f(2-i) = 4i \quad \text{und} \quad |f(z)| \le e^2 \quad \text{für alle } z \in \mathbb{C}\,.$$

c) Finden Sie alle Funktionen, die auf einem Gebiet $G \supset [0,1]$ holomorph sind und für die

$$f(\tfrac{1}{n}) = (-1)^n \tfrac{1}{n}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

Aufgabe 3 (4 Punkte)
Sei $f : \overline{K_1(0)} \to \mathbb{C}$ stetig, nicht konstant und auf $K_1(0)$ holomorph. Zeigen Sie, dass f mindestens eine Nullstelle in $K_1(0)$ besitzt, falls $|f|$ konstant auf $\partial K_1(0)$ ist.

Aufgabe 4 (3 Punkte)
Sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine ganze Funktion mit

$$\lim_{|z| \to \infty} \frac{f(z)}{z} = 0.$$

Zeigen Sie, dass f konstant ist.

Aufgabe 5 (6 Punkte)
Sei $(f_n)_{n \ge 1}$ eine Folge auf $\overline{K_1(0)}$ stetiger und auf $K_1(0)$ holomorpher Funktionen. Zeigen Sie: Ist $(f_n)_{n \ge 1}$ gleichmäßig konvergent auf $\partial K_1(0)$, so existiert eine auf $\overline{K_1(0)}$ stetige und auf $K_1(0)$ holomorphe Funktion mit

$$\lim_{n \to \infty} f_n(z) = f(z) \quad \text{für alle } z \in \overline{K_1(0)}.$$