LEHRSTUHL A FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. E. Görlich,
Dipl.-Math. T. Heck, I. Klöcker

Aachen, den 5. Juni 2003

7. Übung zur Analysis IV

Abgabe: Freitag, 20. Juni 2003, bis 12.00 Uhr im Kasten vor Raum 155, Hauptgebäude

Aufgabe 1 (3 Punkte) Eine ganze Funktion f erfülle auf $\mathbb{C}$ die Differentialgleichung

$$f'(z) - af(z) = 0$$

für ein $a \in \mathbb{C}$. Beweisen Sie (mit den Mitteln aus Kapitel XVI), dass mit einer Konstanten $c \in \mathbb{C}$ gilt: $f(z) = ce^{az}$.

Aufgabe 2 (2+2 Punkte) Berechnen Sie die folgenden Integrale:

a) $\displaystyle\int_{\partial K_2(0)} \frac{e^{-z}}{z + \frac{\pi i}{4}}\, dz,$

b) $\displaystyle\int_{\partial K_\pi(0)} \frac{\frac{1}{2}z^4 + 2z^2}{(z-1)^3}\, dz$

Aufgabe 3 (5 Punkte) Es sei $U \subset \mathbb{C}$ offen und L eine Gerade, $f : U \to \mathbb{C}$ sei stetig und auf $U \setminus L$ holomorph. Zeigen Sie mit Hilfe des Satzes von Morera, dass f auf ganz U holomorph ist.

Aufgabe 4 (3+3 Punkte)

a) Berechnen Sie in Abhängigkeit von $R \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1, 2\}$ das Integral

$$\int_{\partial K_R(i)} \frac{z^4 + 3z^2 + \frac{1}{2}iz + 2}{z(z^2+1)}.$$

b) Berechnen Sie für $|a| < r < |b|$, wobei $a, b \in \mathbb{C}$ sind, und $n, m \in \mathbb{N}$ das Integral

$$\int_{\partial K_r(0)} \frac{dz}{(z-a)^n (z-b)^m}.$$

Aufgabe 5 (2+2+2 Punkte) Überprüfen Sie, ob die folgenden Funktionen in den Nullpunkt hinein holomorph fortsetzbar sind:

a) $z \cos z / \sinh(z)$,

b) $\dfrac{z}{e^z - 1}$

c) $z^3 \cos \frac{1}{z}$.

Aufgabe 6 (8* Punkte) Sei G ein Gebiet und $\mathcal{H}(G)$ der Ring der holomorphen Funktionen auf dem Gebiet G. Weiter sei $z_0 \in G$ und

$$\operatorname{ord}_a(f) := \begin{cases} n, & \text{falls } f \text{ in } a \text{ eine Nullstelle der Ordnung } n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\} \text{ hat,} \\ 0, & \text{falls } f \text{ in } a \text{ keine Nullstelle hat.} \end{cases}$$

Im Verlauf dieser Aufgabe sei für $a > 1$ der Ausdruck $a^{-\infty} := 0$ definiert.

a) Beschreiben Sie die Einheiten sowie die irreduziblen Elemente und die Primelemente von $\mathcal{H}(G)$.

b) Zeigen Sie, dass $\mathcal{H}(G)$ kein faktorieller Ring (auch ZPE-Ring genannt) ist.

c) Zeigen Sie, dass

$$d : \mathcal{H}(G) \times \mathcal{H}(G) \to \mathbb{R}, \quad (f,g) \mapsto 2^{-\operatorname{ord}_{z_0}(f-g)}$$

eine Ultrametrik ist.

Hinweis: Die Begriffe findet man in jedem Standardwerk über Algebra (bzw. Topologie im Falle der Ultrametrik).

Aufgabe 7 (5* Punkte, für Lehramtskandidaten zum Vorrechnen) Seien a, $b \in \mathbb{C}$ mit $a \neq 0$. Zeigen Sie, dass $f : \mathbb{C} \setminus \{-b/a\} \to \mathbb{C}$, definiert durch

$$f(z) = \frac{1}{az+b},$$

lokal eine Stammfunktion besitzt. Besitzt f auch global eine Stammfunktion? Für diese Aufgabe benutzen Sie bitte nur die Ergebnisse bis einschließlich Kapitel XVII.

Aufgabe 8 (6* Punkte, für Lehramtskandidaten zum Vorrechnen) Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen und $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph mit $\overline{K_1(0)} \subset U$ und $f(0) = 1$.

a) Berechnen Sie

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial K_1(0)} \left(2 \pm \left(z + \frac{1}{z}\right)\right) \frac{f(z)}{z}\, dz.$$

Zeigen Sie:

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{i\varphi}) \cos^2 \frac{\varphi}{2}\, d\varphi = 2 + f'(0),$$
$$\frac{2}{\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{i\varphi}) \sin^2 \frac{\varphi}{2}\, d\varphi = 2 - f'(0),$$

b) Zeigen Sie die Abschätzung

$$|\operatorname{Re}(f'(0))| \leq 2,$$

falls $\operatorname{Re}(f(z)) \geq 0$ ist für alle $|z| = 1$.