LEHRSTUHL A FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. E. Görlich,
Dipl.-Math. T. Heck, I. Klöcker

Aachen, den 2. Juli 2003

Musterlösung der 7. Übung zur Analysis IV

Aufgabe 1 (3 Punkte) Eine ganze Funktion f erfülle auf $\mathbb{C}$ die Differentialgleichung

$$f'(z) - af(z) = 0$$

für ein $a \in \mathbb{C}$. Beweisen Sie (mit den Mitteln aus Kapitel XVI), dass mit einer Konstanten $c \in \mathbb{C}$ gilt: $f(z) = ce^{az}$.

Lösung Zu zeigen ist $f'(z) - af(z) = 0 \Rightarrow f(z) = ce^{az}$ („$\Leftarrow$" gilt klarerweise auch). Sei also $f'(z) - af(z) = 0$ für alle $z \in \mathbb{C}$. Betrachte die Funktion

$$g(z) := \frac{f(z)}{e^{az}}.$$

Da $e^{az} \neq 0$ für alle $z \in \mathbb{C}$ ist g wohldefiniert. g ist offenbar eine ganze Funktion. Betrachte die Ableitung von g:

$$g'(z) = \frac{f'(z)e^{az} - f(z)ae^{az}}{e^{2az}} = \frac{f'(z) - af(z)}{e^{az}} = 0$$

für alle $z \in \mathbb{C}$. Damit gilt $g(z) \equiv c$ konstant. Damit folgt die Behauptung.

Aufgabe 2 (2+2 Punkte) Berechnen Sie die folgenden Integrale:

a) $\displaystyle\int_{\partial K_2(0)} \frac{e^{-z}}{z + \frac{\pi i}{4}}\, dz,$ b) $\displaystyle\int_{\partial K_\pi(0)} \frac{\frac{1}{2}z^4 + 2z^2}{(z-1)^3}\, dz$

Lösung

a) Sei $U = \mathbb{C}$. Dann gilt mit der Cauchyschen Integralformel für holomorphes $f : U \to \mathbb{C}$:

$$f(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial K_2(0)} \frac{f(z)}{z - w}\, dz \quad \text{für alle } w \in K_2(0).$$

Mit $w = -\frac{\pi i}{4}$ und $f(z) = e^{-z}$ folgt

$$\int_{\partial K_2(0)} \frac{e^{-z}}{z + \frac{\pi i}{4}}\, dz = 2\pi i f(-\frac{\pi i}{4}) = 2\pi i e^{\frac{\pi i}{4}} = 2\pi i \frac{1+i}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}\pi i(1+i).$$

b) Sei $U = \mathbb{C}$. Dann gilt mit der Cauchyschen Integralformel für die 2. Ableitung einer ganzen Funktion f:

$$f''(w) = \frac{2!}{2\pi i} \int_{\partial K_\pi(0)} \frac{f(z)}{(z-w)^3}\, dz \quad \text{für alle } w \in K_\pi(0).$$

Mit $w = 1$ und $f(z) = \frac{1}{2}z^4 + 2z^2$, also $f''(z) = 6z^2 + 4$ folgt

$$\int_{\partial K_\pi(0)} \frac{\frac{1}{2}z^4 + 2z^2}{(z-1)^3}\, dz = \pi i f''(1) = 10\pi i.$$

Aufgabe 3 (5 Punkte) Es sei $U \subset \mathbb{C}$ offen und L eine Gerade, $f : U \to \mathbb{C}$ sei stetig und auf $U \setminus L$ holomorph. Zeigen Sie mit Hilfe des Satzes von Morera, dass f auf ganz U holomorph ist.

Lösung Satz von Morera:

$$\text{Gilt } \int_{\partial\Delta} f(z)\,dz = 0 \text{ für alle } \Delta \text{ mit } \overline{\Delta} \subset U, \text{ so folgt: } f \text{ ist holomoprh auf } U.$$

Sei nun also Δ ein Dreieck mit $\overline{\Delta} \subset U$.

1. Fall $\overline{\Delta} \cap L = \emptyset$. Dann existiert ein Gebiet $G \subset U$ mit $G \cap L = \emptyset$ und $\overline{\Delta} \subset G$ (s. Topologie). Da $f|_G$ holomorph ist, folgt $\int_{\partial\Delta} f(z)\,dz = 0$.

2. Fall $\overline{\Delta} \cap L$ enthält genau einen Eckpunkt oder eine Seite von Δ.

Sei $\partial\Delta$ gegeben durch $[a,b,c,a]$ und sei o. B. d. A.

$$\overline{\Delta} \cap L = \{b\} \quad \text{bzw.} \quad \overline{\Delta} \cap L = [b,c].$$

$\partial\Delta$ sei durch den Weg

$$\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}, t \mapsto \begin{cases} b + 3(\frac{1}{3} - t)(a-b) & t \in [0, \frac{1}{3}] \\ c + 3(\frac{2}{3} - t)(b-c) & t \in [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}] \\ a + 3(1-t)(c-a) & t \in [\frac{2}{3}, 1] \end{cases}$$

parametrisiert. Setze

$$\begin{aligned} b_n &:= b + 3(\tfrac{1}{3} - (\tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{3n}))(a-b) = b + \tfrac{a-b}{n} \to b \quad (n \to \infty) \\ c_n &:= a + 3(1 - (\tfrac{2}{3} + \tfrac{1}{3n}))(c-a) = a + (1 - \tfrac{1}{n})(c-a) \to c \quad (n \to \infty) \end{aligned}$$

$$\gamma_n(t) := \begin{cases} b_n + 3(\frac{1}{3} - t)(a - b_n) & t \in [0, \frac{1}{3}] \\ c_n + 3(\frac{2}{3} - t)(b_n - c_n) & t \in [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}] \\ a + 3(1-t)(c_n - a) & t \in [\frac{2}{3}, 1] \end{cases}$$

Für das durch γ_n gegebene Dreieck Δ_n gilt $\overline{\Delta_n} \cap L = \emptyset$ und $\overline{\Delta_n} \subset \overline{\Delta} \subset U$. Aus dem 1. Fall folgt nun $\int_{\partial\Delta_n} f(z)\,dz = 0$.

Außerdem gilt: $\gamma_n \to \gamma$ gleichmäßig auf $[0,1]$. Dazu: Sei $t \in [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]$ (für die restlichen $t \in [0,1]$ läuft die Rechnung analog):

$$|\gamma_n(t) - \gamma(t)| \leq |c_n - c| + \underbrace{|3(\tfrac{2}{3} - t)|}_{\leq 1}(|b_n - b| + |c_n - c|) \leq |b_n - b| + 2|c_n - c| < \varepsilon$$

für alle $n \geq n_0$ mit $|b_n - b| < \frac{\varepsilon}{3}$ und $|c_n - c| < \frac{\varepsilon}{3}$ (ein solches n_0 existiert, da $b_n \to b$ und $c_0 \to c$ für $n \to \infty$).

Ebenso konvergiert $\gamma_n' \to \gamma'$ gleichmäßig auf $[0,1]$ (gegebenenfalls einseitige Ableitungen). Denn:

$$\gamma'(t) = \begin{cases} 3(a-b) \\ 3(b-c) \\ 3(c-a) \end{cases}, \quad \gamma_n'(t) = \begin{cases} 3(a - b_n) & t \in [0, \frac{1}{3}] \\ 3(b_n - c_n) & t \in [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}] \\ 3(c_n - a) & t \in [\frac{2}{3}, 1]. \end{cases}$$

Mit $b_n \to b$ und $c_n \to c$ folgt nun $\gamma_n' \to \gamma'$ gleichmäßig.

Da f stetig ist auf U, ist f gleichmäßig stetig auf dem Kompaktum $\overline{\Delta} \subset U$. Da $\gamma_n \to \gamma$ glm., konvergiert auch $f \circ \gamma_n \to f \circ \gamma$ glm. auf $[0,1]$. Damit konvergiert weiterhin $(f \circ \gamma_n) \cdot \gamma_n' \to (f \circ \gamma) \cdot \gamma'$ gleichmäßig auf $[0,1]$. Also folgt schließlich

$$\begin{aligned} 0 = \lim_{n\to\infty} \int_{\partial\Delta_n} f(z)\, dz &= \lim_{n\to\infty} \int_0^1 f(\gamma_n(t))\gamma_n'(t)\, dt \\ &\overset{\text{glm. Konv.}}{=} \int_0^1 \lim_{n\to\infty} \big(f(\gamma_n(t))\gamma_n'(t)\big)\, dt = \int_{\partial\Delta} f(z)\, dz \end{aligned}$$

3. Fall L zerschneidet Δ: Zerlege Δ in zwei oder drei Dreiecke und wende den 1. und 2. Fall an. Die zusätlichen Wege heben sich gegenseitig auf.

Aufgabe 4 (3+3 Punkte)

a) Berechnen Sie in Abhängigkeit von $R \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1,2\}$ das Integral

$$\int_{\partial K_R(i)} \frac{z^4 + 3z^2 + \frac{1}{2}iz + 2}{z(z^2+1)}\, dz.$$

b) Berechnen Sie für $|a| < r < |b|$, wobei $a, b \in \mathbb{C}$ sind, und $n, m \in \mathbb{N}$ das Integral

$$\int_{\partial K_r(0)} \frac{dz}{(z-a)^n (z-b)^m}.$$

Lösung

a) Berechne die Partialbruchzerlegung des Bruches:

$$\frac{z^4 + 3z^2 + \frac{1}{2}iz + 2}{z(z^2+1)} = z + \frac{2(z^2+1) + \frac{1}{2}iz}{z(z^2+1)} \overset{!}{=} z + \frac{A}{z} + \frac{B}{z-i} + \frac{C}{z+i}.$$

Finde A, B, C durch Einsetzen verschiedener Stellen:

$$\begin{aligned} z = 0: &\quad 2 = A \cdot (-i) \cdot i = A \\ z = i: &\quad -\frac{1}{2} = B \cdot i \cdot (2i) = -2B \Rightarrow B = \frac{1}{4} \\ z = -i: &\quad \frac{1}{2} = C \cdot (-i) \cdot (-2i) = -2C \Rightarrow C = -\frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Also ist

$$\frac{z^4 + 3z^2 + \frac{1}{2}iz + 2}{z(z^2+1)} = z + \frac{2}{z} + \frac{1}{4}\frac{1}{z-i} - \frac{1}{4}\frac{1}{z+i}.$$

Aus der Cauchyschen Integralformel folgt

$$\int_{\partial K_r(z_0)} \frac{1}{\zeta - z}\, d\zeta = \begin{cases} 2\pi i, & z \in K_{r(z_0)} \\ 0, & z \in \mathbb{C} \setminus \overline{K_r(z_0)} \end{cases} \quad \text{(Integrand ist in diesem Fall holomorph).}$$

Damit folgt:

$$I := \int_{\partial K_R(i)} \frac{z^4 + 3z^2 + \frac{1}{2}iz + 2}{z(z^2+1)}\, dz$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_{\partial K_R(i)} z\,dz + \int_{\partial K_R(i)} \frac{2}{z}\,dz + \int_{\partial K_R(i)} \frac{1}{4(z-i)}\,dz + \int_{\partial K_R(i)} \frac{-1}{4(z+i)}\,dz \\
&=: I_1 + I_2 + I_3 + I_4,
\end{aligned}
$$

wobei die Werte für $I_1 \dots I_4$ sowie für I folgender Tabelle entnommmen werden können, jeweils in Abhängigkeit von R.

R	I_1	I_2	I_3	I_4	I
$0 < R < 1$	0	0	$\frac{1}{2}\pi i$	0	$\frac{1}{2}\pi i$
$1 < R < 2$	0	$4\pi i$	$\frac{1}{2}\pi i$	0	$\frac{9}{2}\pi i$
$R > 2$	0	$4\pi i$	$\frac{1}{2}\pi i$	$-\frac{1}{2}\pi i$	$4\pi i$

b) Sei $U := K_b(0)$, also gilt $\overline{K_r(0)} \subset U$, U offen, $f : U \to \mathbb{C}$, $z \mapsto \frac{1}{(z-b)^m}$ ist für $m \in \mathbb{N}$ holomorph. Daraus folgt:

$$
\begin{aligned}
\int_{\partial K_r(0)} \frac{dz}{(z-a)^n (z-b)^m} &= \int_{\partial K_r(0)} \frac{f(z)}{(z-a)^n}\,dz \underset{(2.3)}{=} \frac{2\pi i}{(n-1)!} f^{(n-1)}(a) \\
&= \frac{2\pi i}{(n-1)!}(-m)\cdot\dots\cdot(-m-n+2)\frac{1}{(a-b)^{m+n-1}} \\
&= \frac{2\pi i}{(n-1)!}(-1)^{n-1}\frac{(m+n-2)!}{(m-1)!}\frac{1}{(a-b)^{m+n-1}} \\
&= 2\pi i(-1)^m \binom{m+n-2}{n-1}\frac{1}{(b-a)^{m+n-1}}
\end{aligned}
$$

Aufgabe 5 (2+2+2 Punkte) Überprüfen Sie, ob die folgenden Funktionen in den Nullpunkt hinein holomorph fortsetzbar sind:

a) $z \cos z / \sinh(z)$,

b) $\dfrac{z}{e^z - 1}$

c) $z^3 \cos \frac{1}{z}$.

Lösung

a) Sei $f(z) := z\frac{\cos z}{\sinh z}$ für $z \in K_\pi(0) \setminus \{0\}$. $K_\pi(0)$ ist offen, $f : K_\pi(0) \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ ist holomorph. Die Potenzreihenentwicklung von sinh ist

$$
\sinh(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!}.
$$

Damit gilt:

$$
\lim_{z\to 0} \frac{z}{\sinh(z)} = \lim_{z\to 0} \frac{1}{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{(2k+1)!}} = 1,
$$

also ist $\lim_{z\to 0} f(z) = 1 \cdot \lim_{z\to 0} \cos z = 1$, also ist f nach dem Riemannschen Hebbarkeitssatz in 0 holomorph fortsetzbar.

b) Definiere $f(z) := \frac{z}{e^z-1}$ für $z \in K_{2\pi}(0) \setminus \{0\}$. Mit der Potenzreihendarstellung von $\exp(z)$ gilt

$$
\frac{z}{e^z - 1} = \frac{z}{\left(\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}\right) - 1} = \frac{z}{\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k!}} = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{(k+1)!}\right)^{-1} = 1 \text{ für } z = 0,
$$

also $\lim_{z\to 0} f(z) = 1$. Damit ist f in 0 nach dem Riemannschen Hebbarkeitssatz holomorph fortsetzbar.

c) Sei $f(z) := z^3 \cos\frac{1}{z}$ für $z \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$. Betrachte $z_k := \frac{1}{ik}$ für $k \in \mathbb{N}$. Damit gilt: $z_k \to 0$ für $k \to \infty$. Es ist

$$f(z_k) = \frac{1}{(ik)^3}\cos(ik) = \frac{1}{(ik)^3}\frac{e^{-k}+e^k}{2},$$

also ist $|f(z_k)| = \frac{1}{2k^3}|e^k + e^{-k}| \to \infty$ für $k \to \infty$. Das bedeutet, dass $\lim_{z\to 0} f(z)$ nicht existiert, also ist f im Nullpunkt auch nicht holomorph fortsetzbar nach dem Riemannschen Hebbarkeitssatz.

Aufgabe 6 (8^* Punkte) Sei G ein Gebiet und $\mathcal{H}(G)$ der Ring der holomorphen Funktionen auf dem Gebiet G. Weiter sei $z_0 \in G$ und

$$\mathrm{ord}_a(f) := \begin{cases} n, & \text{falls } f \text{ in } a \text{ eine Nullstelle der Ordnung } n \in \mathbb{N}\cup\{\infty\} \text{ hat,} \\ 0, & \text{falls } f \text{ in } a \text{ keine Nullstelle hat.} \end{cases}$$

Im Verlauf dieser Aufgabe sei für $a > 1$ der Ausdruck $a^{-\infty} := 0$ definiert.

a) Beschreiben Sie die Einheiten sowie die irreduziblen Elemente und die Primelemente von $\mathcal{H}(G)$.

b) Zeigen Sie, dass $\mathcal{H}(G)$ kein faktorieller Ring (auch ZPE-Ring genannt) ist.

c) Zeigen Sie, dass

$$d : \mathcal{H}(G)\times\mathcal{H}(G) \to \mathbb{R}, \quad (f,g) \mapsto 2^{-\mathrm{ord}_{z_0}(f-g)}$$

eine Ultrametrik ist.

Hinweis: Die Begriffe findet man in jedem Standardwerk über Algebra (bzw. Topologie im Falle der Ultrametrik).

Lösung

a) *Einheiten* in Ringen sind Elemente, die invertierbar sind. Ein Element f eines Ringes heißt *irreduzibel*, wenn f keine Einheit ist und aus $f = gh$ folgt, dass g oder h eine Einheit ist. f heißt ein *Primelement*, wenn aus $f|gh$ folgt, dass $f|g$ oder $f|h$ erfüllt ist.

Sei $f \in \mathcal{H}(G)$ für ein Gebiet $G \subset \mathbb{C}$.

(i) Behauptung: f ist Einheit $\Leftrightarrow f(z) \neq 0$ für alle $z \in G$. Beweis:

„$\Rightarrow$“ Sei f eine Einheit, d. h. f^{-1} exisitert. $f(z)f^{-1}(z) = 1$ für alle $z \in G$, also auch $f(z) \neq 0$ für alle $z \in G$, da $\mathbb{C}$ als Körper nullteilerfrei ist.

„$\Leftarrow$“ Sei $f(z) \neq 0$ für alle $z \in G$. Dann ist $g(z) := \frac{1}{f(z)}$ wohldefiniert in G und holomorph mit $f(z)\cdot g(z) = 1$ für alle $z \in G$, also $f \cdot g = 1$. Damit ist $g = f^{-1}$, f also eine Einheit.

(ii) Behauptung: f ist irreduzibel $\Leftrightarrow$ f hat genau eine Nullstelle, diese ist einfach. Beweis:

„$\Leftarrow$“ Sei f mit genau einer Nullstelle $z_0 \in G$, die einfach ist. Also ist f keine Einheit und $f \neq 0$. Sei nun $f = gh$, $g,h \in \mathcal{H}(G)$. Da die Nullstelle z_0 einfach ist, ist entweder $g(z_0) = 0$ oder $h(z_0) = 0$, aber nicht beides. Da z_0 einzige Nullstelle von f ist, sind g und h nullstellenfrei auf $G\setminus\{z_0\}$. Also ist entweder g oder h eine Einheit, also ist f irreduzibel.

„$\Rightarrow$“ Sei f irreduzibel. Also ist f keine Einheit und $f \neq 0$. Also existiert ein $z_0 \in G$ mit $f(z_0) = 0$. Zeige: Dies ist die einzige Nullstelle von f, und sie ist einfach.

Angenommen also, f hat (i) eine mehrfache Nullstelle in z_0 oder (ii) eine weitere Nullstelle z_1. Dann ist $f = gh$ mit

$$g(z) := z - z_0 \quad \text{und} \quad h(z) := \begin{cases} f'(z_0) & (i) \\ \dfrac{f(z)}{z-z_0} & (ii) \end{cases}.$$

Also ist $g(z_0) = 0$ und $h_{z_0} = 0$ bzw. $h_{z_1} = 0$. Also sind weder g noch h eine Einheit. Widerspruch.

(iii) Behauptung: f ist prim $\Leftrightarrow$ f ist irreduzibel. Beweis:

„$\Leftarrow$“ Sei $p \in \mathcal{H}(G)$ irreduzibel und sei z_0 die einfache Nullstelle von p. Es gelte $p|gh$, also $\frac{gh}{p}$ holomorph in G. Wegen $p(z_0) = 0$ muss o. B. d. A. $g(z_0) = 0$ sein (sonst g und h vertauschen). Damit gilt aber auch $p|g$, somit ist p prim.

„$\Rightarrow$“ Aus p prim folgt p irreduzibel in beliebigen Ringen (s. Algebra).

b) Ein Ring R heißt faktoriell (oder ZPE-Ring), wenn

(i) R ein Integritätsring ist,

(ii) jedes $a \in R$, $a \neq 0$, das keine Einheit ist, sich als endliches Produkt irreduzibler Elemente schreiben läßt, und

(iii) die Zerlegung in (ii) bis auf Einheiten und Permutation eindeutig ist.

$\mathcal{H}(G)$ ist kein faktorieller Ring, da die Eigenschaft (ii) nicht gegeben ist.

Beispiel für $G = \mathbb{C}$: Sei $f(z) := \sin(z)$, $f \in \mathcal{H}(G)$. f hat unendlich viele Nullstellen, aber jedes irreduzible Element hat genau eine Nullstelle, also existiert keine (endliche) Produktdarstellung.

Beispiel für ein beschränktes Gebiet G: Sei z_0 ein Randpunkt von G, wegen G offen gilt $z_0 \notin G$. Aus der Offenheit von G folgt weiterhin, dass es ein $z_1 \in G$ gibt, so dass die Verbindungsstrecke $[z_0, z_1]$ mit Ausnahme von z_0 komplett in G liegt. Definiere mit diesen Bezeichnungen die Funktion

$$f : G \to \mathbb{C}, z \mapsto \sin \frac{z-z_0}{z_1-z_0}.$$

Damit ist $f \in \mathcal{H}(G)$, aber f hat wieder unendlich viele Nullstellen in G. Damit existiert wie bei $G = \mathbb{C}$ keine endliche Darstellung als Produkt irreduzibler Elemente.

c) Eine Abbildung $d : \mathcal{H}(G) \times \mathcal{H}(G) \to \mathbb{R}$ heißt *Ultrametrik*, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

(i) d ist symmetrisch, d. h. $d(f,g) = d(g,f)$ für alle $f,g \in \mathcal{H}(G)$,

(ii) $d(f,g) = 0 \Leftrightarrow f = g$ und $d(f,g) \geq 0$ für alle $f,g \in \mathcal{H}(G)$,

(iii) $d(f,h) \leq \max\{d(f,g), d(g,h)\}$ für alle $f,g,h \in \mathcal{H}(G)$.

Seien $f,g,h \in \mathcal{H}(G)$ und $z_0 \in G$.

zu (i): d ist symmetrisch, da für alle $f \in \mathcal{H}(G)$ und $z \in G$ gilt: $\mathrm{ord}_{z_0}(f) = \mathrm{ord}_{z_0}(-f)$. Dazu benutze z. B. Lemma (3.8)(iii):
Es existiert ein $r > 0$, so dass $f(z) = (z-z_0)^{\mathrm{ord}_{z_0}(f)} g(z)$ für alle $z \in K_r(z_0) \cap G$, $g(z_0) \neq 0$ und $g : K_r(z_0) \to \mathbb{C}$ holomorph. Dann gilt auch $-f(z) = (z-z_0)^{\mathrm{ord}_{z_0}(f)}(-g(z))$, also ist $\mathrm{ord}_{z_0}(-f) = \mathrm{ord}_{z_0}(f)$.

zu (ii): Wegen $\operatorname{ord}_{z_0}(f) \in \mathbb{N} \cup \{0, \infty\}$ gilt $d(f,g) \geq 0$.
Aus $d(f,g) = 0$ folgt nach der Definition, dass $f - g$ in z_0 eine Nullstelle der Ordnung ∞ hat. Das bedeutet mit dem Identitätssatz, dass $f - g = 0$ ist auf G, also $f = g$.

zu (iii): Aus Lemma (3.2)(iii) folgt, dass $\operatorname{ord}_{z_0}(f-h) = \operatorname{ord}_{z_0}(f-g-(h-g)) \geq \min\{\operatorname{ord}_{z_0}(f-g), \operatorname{ord}_{z_0}(h-g)\}$. Daraus folgt

$$d(f,h) = 2^{-\operatorname{ord} z_0(f-h)} \leq 2^{-\min\{\operatorname{ord}_{z_0}(f-g), \operatorname{ord}_{z_0}(h-g)\}} \leq \begin{cases} 2^{-\operatorname{ord}_{z_0}(f-g)} \\ 2^{-\operatorname{ord}_{z_0}(h-g)} \end{cases}$$

Also ist d eine Ultrametrik.