LEHRSTUHL A FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. E. Görlich,
Dipl.-Math. T. Heck, I. Klöcker

Aachen, den 15. Mai 2003

4. Übung zur Analysis IV

Abgabe: Freitag, 23. Mai 2003, bis 12.00 Uhr im Kasten vor Raum 155, Hauptgebäude

Aufgabe 1 (5+2+3 Punkte)
Für $M = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{GL}(2,\mathbb{C})$ mit $c \neq 0$ sei die Abbildung $f_M : \mathbb{C} \setminus \{-\frac{d}{c}\} \to \mathbb{C} \setminus \{\frac{a}{c}\}$ definiert durch

$$f_M(z) = \frac{az+b}{cz+d} \quad \text{für alle } z \in \mathbb{C} \setminus \{-\tfrac{d}{c}\}.$$

a) Zeigen Sie, dass die so definierte Abbildung f_M biholomorph ist, und berechnen Sie die Umkehrabbildung.

b) Wie ist f_M im Fall $c = 0$ zu definieren? Zeigen Sie, dass f_M auch in diesem Fall biholomorph ist.

c) Wie lässt sich für $M, N \in \mathrm{GL}(2,\mathbb{C})$ die Komposition $f_M \circ f_N$ berechnen?

Aufgabe 2 (3 Punkte)
Untersuchen Sie die Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, z \mapsto z \cdot \mathrm{Im}(z)$, auf komplexe Differenzierbarkeit und bestimmen Sie ihre Ableitung in den Punkten, in denen sie existiert. Wo ist f holomorph?

Aufgabe 3 (3 Punkte)
Sei f holomorph auf dem Gebiet $G \subset \mathbb{C}$. Es sei $G^* := \{z \in \mathbb{C};\ \overline{z} \in G\}$, und auf G^* sei die Funktion $f^* : G^* \to \mathbb{C}$ definiert durch $f^*(z) = \overline{f(\overline{z})}$.
Zeigen Sie, dass f^* auf G^* holomorph ist, und berechnen Sie die erste Ableitung von f^*.

Aufgabe 4 (3 Punkte)
Sei f eine auf einem Gebiet $G \subset \mathbb{C}$ holomorphe Funktion mit

$$\mathrm{Im}\, f(z) = (\mathrm{Re}\, f(z))^2$$

für alle $z \in G$. Zeigen Sie, dass f konstant auf G ist.

Aufgabe 5 (5 Punkte)
Sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definiert durch

$$f(x+iy) = \begin{cases} \frac{x^2+iy^2}{x^2+y^2} & \text{falls } x, y \in \mathbb{R} \text{ mit } x+iy \neq 0, \\ 0 & \text{falls } x = y = 0. \end{cases}$$

In welchen Punkten sind die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen erfüllt? In welchen Punkten ist f komplex differenzierbar? Wo ist f holomorph?

Aufgabe 6 (3 Punkte)
Bestimmen Sie alle ganzen Funktionen $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit $\mathrm{Im}\, f(x+iy) = \exp(x)\sin(y)$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$.