LEHRSTUHL A FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. E. Görlich,
Dipl.-Math. T. Heck, I. Klöcker

Aachen, den 30. April 2003

2. Übung zur Analysis IV

Abgabe: Freitag, 9. Mai 2003, bis 12.00 Uhr im Kasten vor Raum 155, Hauptgebäude

Aufgabe 1 (3+4 Punkte)

a) Sei $R = [a,b] \times [c,d]$ mit $a < b$ und $c < d$ ein Rechteck im $\mathbb{R}^2$, sei $U \subset \mathbb{R}^2$ offen mit $R \subset U$ und seien $f, g : U \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbare Funktionen. Zeigen Sie, dass

$$\int_R \left(\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial g}{\partial y} \right) d\lambda(x,y) = \int_c^d f(b,y)\, dy - \int_a^b g(x,d)\, dx - \int_c^d f(a,y)\, dy + \int_a^b g(x,c)\, dx.$$

b) Zeigen Sie, dass der Gaußsche Integralsatz auch für kompakte Quader im $\mathbb{R}^2$ gilt.

Notation: Wir führen die folgende abkürzende Schreibweise für Randintegrale im $\mathbb{R}^2$ ein:
Sei $A \subset \mathbb{R}^2$ ein Kompaktum mit glattem Rand (oder ein kompakter Quader; vgl. Aufgabe 1). Der Rand werde durch r Kurven $\gamma_i : [0,1] \to \mathbb{R}^2, t \mapsto (x_i(t), y_i(t))^t$, $1 \le i \le r$, parametrisiert (vgl. Anfang von §4 in Kapitel XV) und $a, b : U \to \mathbb{R}$ seien zwei auf einer offenen Obermenge U von A stetig differenzierbare Funktionen. Dann ist

$$\int_{\partial R} a\, dx + b\, dy := \sum_{i=1}^r \int_0^1 a(\gamma_i(t)) \cdot x_i'(t) + b(\gamma_i(t)) \cdot y_i'(t)\, dt.$$

Aufgabe 2 (3+3 Punkte)
Berechnen Sie mit Hilfe des Gaußschen Integralsatzes die folgenden Integrale:

a) $\displaystyle\int_{\partial R} -\tfrac{1}{2} y^2 e^x\, dx + y e^x\, dy$, wobei $R = [-1,1] \times [1,6]$ ist.

b) $\displaystyle\int_{\partial A} x^2 y\, dx + (2x - y + 2)\, dy$, wobei $A := \{ \binom{x}{y} \in \mathbb{R}^2;\ x^2 + y^2 \le 5 \}$ ist.

Aufgabe 3 (3 Punkte)
Sei $B \subset \mathbb{R}^2$ ein Kompaktum mit glattem Rand. Zeigen Sie:

$$\lambda(B) = \int_{\partial B} x\, dy = -\int_{\partial B} y\, dx = \frac{1}{2} \int_{\partial B} x\, dy - y\, dx.$$

Aufgabe 4 (4 Punkte)
Seien $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}_+^*$ und E das Ellipsoid $E = \{ x \in \mathbb{R}^n;\ (\frac{x_1}{a_1})^2 + \cdots + (\frac{x_n}{a_n})^2 \le 1 \}$. Berechnen Sie

$$\int_{\partial E} \frac{1}{\sqrt{\frac{x_1^2}{a_1^4} + \cdots + \frac{x_n^2}{a_n^4}}}\, dS(x).$$

Aufgabe 5 (5 Punkte)
Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $F : U \to \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar und $B \subset U$ ein Kompaktum mit der folgenden Eigenschaft: Für alle $\varepsilon > 0$ existiert ein Kompaktum $B_\varepsilon \subset U$ mit glattem Rand und mit $\lambda(B \Delta B_\varepsilon) < \varepsilon$ (zur Erinnerung: $A \Delta B := (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$).
Zeigen Sie, dass

$$\int_B \operatorname{div} F\, d\lambda_n = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\partial B_\varepsilon} \langle F, \nu_\varepsilon \rangle\, dS_{n-1},$$

wobei ν_ε das äußere Normaleneinheitsfeld von B_ε sei.