LEHRSTUHL A FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. A. Krieg, A. Marschner

Aachen, den 23. April 2003

1. Übung zur Algebraischen Zahlentheorie

Abgabe: Montag, 05.05.2003, 12.00 Uhr

Informationen zum Übungsbetrieb: Jeweils alle zwei Wochen mittwochs nach der Vorlesung wird ein Übungsblatt ausgegeben. Die bearbeiteten Lösungen sind bis zum übernächsten Montag, 12.00 Uhr, im Kasten vor dem Sekretariat des Lehrstuhls, Raum 153, Hauptgebäude (HG) abzugeben. Die Übungen können in Zweiergruppen bearbeitet werden. Die korrigierten Lösungen werden dann in der Übung am Mittwoch zurückgegeben. Dort wird eine Lösung der Aufgaben vorgestellt. Die Übungsblätter zur algebraischen Zahlentheorie sind auch im WWW erhältlich (`http://www.mathA.rwth-aachen.de/lehre/ss03/algzth`).
Außerdem stehen für alle Fragen und Probleme rund um die Vorlesung Prof. Dr. A. Krieg (nach der Vorlesung sowie nach Vereinbarung, auch per Email möglich, Raum 153, HG) und der Assistent A. Marschner (nach der Übung sowie nach Vereinbarung, Raum 155, HG) zur Verfügung. Sie können die Mitarbeiter auch per E-Mail erreichen: krieg@mathA.rwth-aachen.de, axel.marschner@mathA.rwth-aachen.de.
Die Übung wird dabei im Gegensatz zum Grundstudium eine Mischung aus Diskussionstunde und Übung sein. Die erste Übung findet am 07.05.03 statt und dann im Rhythmus von 2 Wochen. Den Schein über die Teilnahme an den Übungen erhält, wer mindestens einmal eine Aufgabe vorrechnet und mindestens 50 Prozent der Übungspunkte erreicht.

Aufgabe 1 (4 Punkte):
Sei L die Vereinigung aller algebraischen Zahlkörper $K \subset \mathbb{C}$. Zeigen Sie, dass L ein Körper ist. Geben Sie eine weitere Beschreibung von L an.

Aufgabe 2 (5 Punkte):
Sei K ein algebraischer Zahlkörper. Zeigen Sie, dass K nur endlich viele Einheitswurzeln enthält.

Aufgabe 3 (5 Punkte):
Sei $\alpha \in \mathbb{C}$ eine Nullstelle des Polynoms $p(x) = x^3 + 7$. Zeigen Sie, dass $(1, \alpha, \alpha^2)$ eine Basis von $\mathbb{Q}(\alpha)$ über $\mathbb{Q}$ ist. Ist $\mathbb{Q}(\alpha) \,|\, \mathbb{Q}$ eine Galois-Erweiterung?

Aufgabe 4 (5 Punkte):
Sei $K = \mathbb{Q}(i, \sqrt{2})$.

a) Zeigen Sie $[K : \mathbb{Q}] = 4$ und geben Sie ein primitives Element der Körpererweiterung $K|\mathbb{Q}$ an.

b) Bestimmen Sie alle Automorphismen von K.

Aufgabe 5 (6 Punkte):
Seien $\alpha := 1 + \sqrt{2} \in \mathbb{Q}(\sqrt{2}) =: K_1$ und $\beta := 2 + \sqrt{3} \in \mathbb{Q}(\sqrt{3}) := K_2$. Zeigen Sie:

a) $\alpha \in O_{K_1} =: O_1$ und $\beta \in O_{K_2} =: O_2$.

b) α bzw. β sind Einheiten in O_1 bzw. O_2.

c) O_1 und O_2 enthalten unendlich viele Einheiten.

d) Die PELLsche Gleichung $x^2 - 2y^2 = 1$ hat unendlich viele Lösungen in $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. Gilt das gleiche für die Gleichung $x^2 - 3y^2 = 1$?