Lehrstuhl A für Mathematik
Prof. Dr. R. L. Stens
Dipl.-Math. F. Bühler

Aachen, den 20.10.1999

2. Übung zu Zahlbereichserweiterungen

(Abgabe: Mittwoch, 3.11.1999, bis 12 Uhr im Übungskasten)

Aufgabe 1: Seien X, Y nicht–leere Mengen und X unendlich. Zeigen Sie:

a) Wenn eine injektive Abbildung $f : X \to Y$ existiert, so ist auch Y unendlich. $\boxed{2}$

b) Wenn eine surjektive Abblidung $g : Y \to X$ existiert, so ist auch Y unendlich. $\boxed{2}$

c) In a) und b) ist die Umkehrung jeweils i.a. nicht richtig. $\boxed{2}$

Aufgabe 2: Sei X eine nicht–leere Menge und (D, S, d) ein Peano-System. Zeigen Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen:

(i) X ist unendlich.

(ii) Es gibt eine injektive Abbildung $f : D \to X$.

(iii) Es gibt eine surjektive Abbildung $g : X \to D$. $\boxed{3}$

Aufgabe 3: Beweisen Sie mit den Mitteln der Vorlesung die *Potenzgesetze* für k, m, $n \in \mathbb{N}_0$.

a) $(m^n)(m^k) = m^{n+k}$. $\boxed{2}$

b) $(m^n)(k^n) = (mk)^n$. $\boxed{2}$

c) $(m^n)^k = m^{(nk)}$. $\boxed{2}$

Aufgabe 4: Untersuchen Sie die algebraische Struktur $(\mathbb{N}_0, *)$ mit $m * n := m^n$ für m, $n \in \mathbb{N}$. (Assoziativgesetz, Kommutativgesetz, Existenz von rechts- oder linksneutralem Element und Rechts- oder Linksinversen). $\boxed{5}$

Aufgabe 5: Gegeben seien die Menge $M = \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$, das Element $\mathbf{0} = (0, 0) \in M$ sowie eine Abbildung $\nu : M \to M$ definiert durch

$$\nu(m, n) = \begin{cases} (m+1, n-1), & \text{falls } n \neq 0, \\ (0, m+1), & \text{falls } n = 0. \end{cases}$$

a) Zeigen Sie, daß durch $(M, \nu, \mathbf{0})$ ein Peano-System gegeben wird. $\boxed{4}$

b) Folgern Sie aus a), daß $\mathbb{N}_0$ und $\mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ gleichmächtig sind. $\boxed{2}$

$\boxed{\boxed{26}}$