Lehrstuhl A für Mathematik
Prof. Dr. A. Krieg, T. Dern, I. Klöcker Aachen, den 11. Februar 2000

Ferienübung zur Analysis I

Abgabe: Freitag, 7.4.2000, 10.00 Uhr

Bemerkung: Die Punkte, die Sie in dieser Übung erreichen, zählen schon für die Analysis II.

Informationen zur Scheinklausur zur Analysis I am 18.02.2000:
Beginn: 10 Uhr. Dauer: 2 Stunden.
Diejenigen, deren Nachname mit den Buchstaben A-K beginnt, schreiben in Hörsaal I, alle anderen im Hörsaal II. Bitte erscheinen Sie unbedingt pünktlich und bringen Sie Ihren Studierendenausweis und Ihren Personalausweis mit. Bei Verspätung bzw. ohne Ausweise ist die Klausurteilnahme i.A. nicht möglich.
Sitzordnung: In jeder zweiten Reihe kann jeder dritte Platz besetzt werden.
Es sind keinerlei Hilfsmittel zugelassen. Schreib- und Schmierpapier wird in ausreichender Menge zur Verfügung gestellt. Es darf kein eigenes Papier benutzt werden. Zum Schreiben sind Kugelschreiber oder Tinte zu benutzen. Zum Bestehen der Klausur genügt es, ein Drittel der Gesamtpunktzahl zu erreichen.
Nach Abschluss der Korrektur werden die Ergebnisse im Schaukasten am Lehrstuhl A ausgehängt. Die Rückgabe der Klausur findet am Montag, den 21.02.2000, um 12.00 Uhr im Hörsaal III statt. Im Anschluss an die Rückgabe haben Sie Gelegenheit, Einwände gegen die Korrektur zu erheben. Später sind keine Beschwerden mehr möglich.
Klausurrelevant sind der gesamte Vorlesungsstoff des 1. Semesters sowie der Übungsstoff der 1. bis 16. Übung.
Die Nachholklausur findet am Donnerstag, den 06.04.2000, um 10.00 Uhr im Hörsaal Fo1 statt. Vor dieser Klausur werden nocheinmal Beratungsstunden abgeboten. Sobald die genauen Termine feststehen, werden diese durch Aushang und im Internet bekanntgegeben.

Aufgabe 1 (4^* Punkte) Sei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ zweimal differenzierbar mit $f''=-f$. Zeigen Sie

$$f(x)=f(0)\cos x+f'(0)\sin x,\ \ x\in\mathbb{R}.$$

Hinweis: Betrachten Sie $g(x)=f(x)-f(0)\cos x-f'(0)\sin x$ und $h(x)=g(x)^2+g'(x)^2$.

Aufgabe 2 (5^* Punkte) Sei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ zweimal differenzierbar mit $f''=f$. Zeigen Sie

a) $f(x)=f(0)\cosh x+f'(0)\sinh x,\quad x\in\mathbb{R}.$

b) $f(x)=ae^x+be^{-x}$, $x\in\mathbb{R}$, mit geeigneten $a,b\in\mathbb{R}$.

Aufgabe 3 (4^* Punkte) Lösen Sie das folgende Problem analytisch.
a) Welches Dreieck hat bei gegebenem Umfang und gegebener Grundseite maximalen Flächeninhalt?
b) Welches Dreieck hat bei gegebenem Umfang maximalen Flächeninhalt?

Aufgabe 4 (5^* Punkte) a) Sei I ein Intervall und $f:I\to\mathbb{R}$ konvex. Zeigen Sie, dass

$$f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)\le f(x)\quad \text{für alle } x,x_0\in I.$$

b) Beweisen Sie mit Hilfe von Teil a) die folgenden Ungleichungen:
(i) $e^x\ge 1+x$ für alle $x\in\mathbb{R}$.
(ii) $\log x\le x-1$ für alle $x\in\mathbb{R}, x>0$.

Aufgabe 5 (7* Punkte) Seien $a, b \in \mathbb{R}^*_+$. Der Preis eines Produktes werde gegeben durch die Funktion

$$p(x) = a - bx,$$

wobei x die Absatzmenge bezeichnet.
a) Charakterisieren Sie den ökonomisch sinnvollen Bereich. Was wird man unter dem Prohibitivpreis und der Sättigungsmenge verstehen?
b) Der Umsatz $U(x)$ ist das Produkt aus Preis und Absatzmenge. Bestimmen Sie das Umsatzmaximum. Skizzieren Sie die relevanten Graphen. Welche Beziehungen bestehen zu den Begriffen in a)?
c) Die Kosten werden gegeben durch $K(x) = K_0 + cx$, wobei $K_0 > 0$ die Fixkosten und $c > 0$ die variablen Kosten pro Stück bezeichnen. Bestimmen Sie das Gewinnmaximum.
d) Erklären Sie ökonomisch, warum die gewinnmaximale Absatzmenge kleiner ist als die umsatzmaximale Absatzmenge.

Aufgabe 6 (13* Punkte) Die *verallgemeinerten Binomialkoeffizienten* seien definiert durch

$$\binom{\alpha}{0} := 1, \quad \binom{\alpha}{n} := \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}, \alpha \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}.$$

a) Zeigen Sie, dass

$$\binom{\alpha}{k} + \binom{\alpha}{k+1} = \binom{\alpha+1}{k+1} \quad \text{für } \alpha \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{N}_0.$$

b) Sei $f(x) = (1+x)^\alpha, \alpha \in \mathbb{R}, x > -1$. Bestimmen Sie die Taylorreihe T_f von f mit Entwicklungspunkt 0, bestimmen Sie den Konvergenzradius von T_f und zeigen Sie mit Hilfe des Restglieds von Lagrange, dass $f(x) = T_f(x)$ für alle $x \in [0; 1)$ gilt.
c) Zeigen Sie, dass für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ und alle $n \in \mathbb{N}_0$ die folgende Identität gilt:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{\alpha}{k}\binom{\beta}{n-k} = \binom{\alpha+\beta}{n}.$$

d) Bestimmen Sie $a, b \in \mathbb{R}$, so dass $\sqrt{3} \in (a; b)$ und $b - a < 10^{-4}$.
Hinweis: Schreiben Sie 3 in der Form $\frac{p^2}{q^2} \cdot \left(1 + \frac{3q^2-p^2}{p^2}\right)$, so dass $0 < \frac{3q^2-p^2}{p^2} << 1$ ist, berechnen Sie dann mit Hilfe der Taylor-Formel näherungsweise den Wert von $\sqrt{3}$ und schätzen Sie den Fehler mit dem Restglied von Lagrange ab.
e) Zeigen Sie, dass $(1+x)T_f'(x) = \alpha T_f(x)$ und $(1+x)f'(x) = \alpha f(x)$ für alle $x \in (-1; 1)$. Folgern Sie daraus, dass $\frac{d}{dx}\frac{T_f(x)}{f(x)} = 0$, und zeigen Sie schließlich, dass $f(x) = T_f(x)$ für alle $x \in (-1; 1)$.