Lehrstuhl A für Mathematik
Prof. Dr. A. Krieg, T. Dern, I. Klöcker

Aachen, den 4. Februar 2000

16. Übung zur Analysis I

Abgabe: Mittwoch, 9.2.2000, 14.00 Uhr

Organisatorisches: 1) Diese Übung ist klausurrelevant, aber die Punkte dieser Übung zählen nicht mehr zu den Pflichtpunkten.

2) In der Woche nach Vorlesungsende werden Beratungsstunden wie folgt angeboten: Montag, 14.2.2000 bis Donnerstag, 17.2.2000, jeweils 14.00-15.00 Uhr im Raum 248, HG. Ausserdem können Sie sich bei Bedarf auch direkt an die Assistenten wenden.

Aufgabe 1 (4^* Punkte) Untersuchen Sie die Funktion

$$f : [0,\infty) \to \mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases} x^x, & \text{falls } x > 0, \\ 1, & \text{falls } x = 0, \end{cases}$$

auf Stetigkeit und Differenzierbarkeit, bestimmen Sie maximale Intervalle, auf denen f monoton ist, sowie alle (lokalen und globalen) Extremstellen von f.

Aufgabe 2 (4^* Punkte) Sei $\varnothing \neq I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, $f : I \to \mathbb{R}$ differenzierbar und f' auf I beschränkt. Zeigen Sie: Es gibt $M \geq 0$ mit $|f(x) - f(y)| \leq M\,|x-y|$ für alle $x, y \in I$. Welches ist die optimale Konstante M?

Aufgabe 3 (3^* Punkte) Seien $a, b > 0$. Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte, soweit diese existieren:

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin(x)} - \frac{1}{x}\right),$ (2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{a^x - b^x}{x},$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} x\,(\tanh(ax) - 1)\,.$

Aufgabe 4 ($*$) Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ differenzierbar mit $f'(a) \neq f'(b)$. Zeigen Sie: f' nimmt in (a,b) jeden Wert zwischen $f'(a)$ und $f'(b)$ an.