

## 16. Übung zur Analysis I

Abgabe: Mittwoch, 9.2.2000, 14.00 Uhr

**Organisatorisches:** 1) Diese Übung ist klausurrelevant, aber die Punkte dieser Übung zählen nicht mehr zu den Pflichtpunkten.

2) In der Woche nach Vorlesungsende werden Beratungsstunden wie folgt angeboten: Montag, 14.2.2000 bis Donnerstag, 17.2.2000, jeweils 14.00-15.00 Uhr im Raum 248, HG. Ausserdem können Sie sich bei Bedarf auch direkt an die Assistenten wenden.

**Aufgabe 1** (4\* Punkte) Untersuchen Sie die Funktion

$$f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases} x^x, & \text{falls } x > 0, \\ 1, & \text{falls } x = 0, \end{cases}$$

auf Stetigkeit und Differenzierbarkeit, bestimmen Sie maximale Intervalle, auf denen  $f$  monoton ist, sowie alle (lokalen und globalen) Extremstellen von  $f$ .

**Aufgabe 2** (4\* Punkte) Sei  $\emptyset \neq I \subset \mathbb{R}$  ein Intervall,  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  differenzierbar und  $f'$  auf  $I$  beschränkt. Zeigen Sie: Es gibt  $M \geq 0$  mit  $|f(x) - f(y)| \leq M|x - y|$  für alle  $x, y \in I$ . Welches ist die optimale Konstante  $M$ ?

**Aufgabe 3** (3\* Punkte) Seien  $a, b > 0$ . Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte, soweit diese existieren:

$$(1) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{\sin(x)} - \frac{1}{x} \right), \quad (2) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - b^x}{x},$$
$$(3) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} x (\tanh(ax) - 1).$$

**Aufgabe 4** (\*) Seien  $a, b \in \mathbb{R}$  mit  $a < b$  und  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  differenzierbar mit  $f'(a) \neq f'(b)$ . Zeigen Sie:  $f'$  nimmt in  $(a, b)$  jeden Wert zwischen  $f'(a)$  und  $f'(b)$  an.