Lehrstuhl A für Mathematik
Prof. Dr. A. Krieg, T. Dern, I. Klöcker

Aachen, den 14. Januar 2000

13. Übung zur Analysis I

Abgabe: Freitag, 21.1.2000, 12.00 Uhr

Aufgabe 1 (5 Punkte)
(1) Untersuchen Sie die folgenden Funktionen auf Stetigkeit:

$$\begin{aligned} f &: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{e^{-x}}{1+|\cos(2x)|}, \\ g &: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x - [x], \\ h &: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto g(x)(1-g(x)). \end{aligned}$$

(2) Zeigen Sie, dass $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sqrt[3]{x}$ stetig ist, indem Sie für jedes $x_0 \geq 0$ und jedes $\varepsilon > 0$ explizit ein $\delta > 0$ wählen, so dass $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ für alle $x \in [0,\infty)$ mit $|x - x_0| < \delta$.

Aufgabe 2 (4 Punkte)
Zeige Sie: Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{falls } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \\ \frac{1}{q}, & \text{falls } x = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q} \text{ mit teilerfremden } p, q \in \mathbb{Z},\ q > 0, \end{cases}$$

ist stetig in $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ und unstetig in jeder rationalen Zahl.

Aufgabe 3 (3 Punkte)
Sei $\varnothing \neq M \subset \mathbb{R}$ abgeschlossen, $f : M \to \mathbb{R}$ stetig, $c \in \mathbb{R}$ und $N_c = \{x \in M \mid f(x) = c\}$. Zeigen Sie, dass N_c abgeschlossen ist.

Aufgabe 4 (4 Punkte)
Untersuchen Sie, ob folgende Grenzwerte existieren und bestimmen Sie diese gegebenenfalls:

(1) $$\lim_{x \downarrow 0} \frac{\sin(x)}{x},$$

(2) $$\lim_{x \downarrow 1} \frac{x^m - 1}{x^n - 1} \quad \text{für } m, n \in \mathbb{N},$$

(3) $$\lim_{x \to \infty} x \left(1 - \sqrt{1 - \frac{1}{x}}\right).$$

Aufgabe 5 ($*$)
Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(0) = 1$ und $f(x+y) \leq f(x)f(y)$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie: Ist f stetig in 0, so ist f stetig.