Lehrstuhl A für Mathematik
Prof. Dr. A. Krieg, T. Dern, I. Klöcker

Aachen, den 17. Dezember 1999

11. Übung zur Analysis I

Abgabe: Freitag, 7.1.2000, 12.00 Uhr

Organisatorisches: Bitte beachten Sie:

- Die Beratungsstunde von J. Rettemeier findet ab sofort mittwochs um 14.15–15.15 Uhr im Raum 248 statt.
- Die Beratungsstunde von G. Hagel am Donnerstag, 23.12.1999, wird (einmalig) auf Donnerstag, 6.1.2000 (um 17.15 Uhr im Raum 248) verschoben.
- Die Nachholklausur findet statt am Donnerstag, 6.4.2000, 10.00–12.00 Uhr im Hörsaal Fo 1.

Aufgabe 1 (4 Punkte) (1) Zeigen Sie $\sin(x)\cos(x) = \frac{1}{2}\sin(2x)$, indem Sie das Cauchy-Produkt der Reihen von sin und cos berechnen und geeignet vereinfachen.
(2) Geben Sie Beispiele für bedingt konvergente Reihen $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ und $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n$, so dass deren Cauchy-Produkt $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n$ (mit $c_n = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$) a) divergiert bzw. b) bedingt konvergiert bzw. c) absolut konvergiert.

Aufgabe 2 (6 Punkte) Die Funktionen $\sinh : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ und $\cosh : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ werden definiert durch

$$\begin{aligned} \cosh(z) &:= \tfrac{1}{2}\left((\exp(z) + \exp(-z)\right) && \text{(Cosinus hyperbolicus)} \\ \sinh(z) &:= \tfrac{1}{2}\left((\exp(z) - \exp(-z)\right) && \text{(Sinus hyperbolicus).} \end{aligned}$$

(1) Beweisen Sie: Für $w, z \in \mathbb{C}$ ist

$$\begin{aligned} \cosh(z+w) &= \cosh(z)\cosh(w) + \sinh(z)\sinh(w), \\ \sinh(z+w) &= \sinh(z)\cosh(w) + \cosh(z)\sinh(w), \\ 1 &= \cosh(z)^2 - \sinh(z)^2. \end{aligned}$$

(2) Zeigen Sie, dass sinh und cosh in Potenzreihen um 0 entwickelbar sind und bestimmen Sie die Koeffizienten dieser Potenzreihen. Wie hängen die Hyperbelfunktionen sinh und cosh mit den Winkelfunktionen sin und cos zusammen?
(3) Skizzieren Sie die Graphen von $\sinh|_{\mathbb{R}}$ und $\cosh|_{\mathbb{R}}$.

Aufgabe 3 (4 Punkte) Für $e = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ und $r \in \mathbb{Q}$ sei e^r definiert wie in Aufgabe 10.2. Zeigen Sie: Für alle $r \in \mathbb{Q}$ gilt

$$\exp(r) = e^r = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{r}{n}\right)^n.$$

Hinweis: Zeigen Sie die Aussage zuerst für $r = \frac{1}{q}$ mit $0 \neq q \in \mathbb{Z}$.

Aufgabe 4 $(*)$: Sei $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass es $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ gibt, so dass für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$\cos(nx) = \sum_{k=0}^{n} a_k (\cos(x))^k.$$