LEHRSTUHL A FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. A. Krieg, T. Dern, I. Klöcker

Aachen, den 10. Dezember 1999

10. Übung zur Analysis I

Abgabe: Montag, 20.12.1999, 10.00 Uhr

Aufgabe 1 (7 Punkte)

(1) Sei $z \in \mathbb{C}$ mit $-z \notin \mathbb{N}$. Bestimmen Sie den Grenzwert der Reihe $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(z+n)(z+n+1)}$.

(2) Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz und absolute Konvergenz:

(i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt[n]{n}}$, (ii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(-2)^n}$, (iii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n^2}}$,

(iv) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[n]{n^3}-1)^n$, (v) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2+(-1)^n}{2n}$, (vi) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$.

Aufgabe 2 (4 Punkte) (1) Sei $(a_n)_{n\geq 1}$ eine monotone Nullfolge. Zeigen Sie, dass die Reihe $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ genau dann konvergiert, wenn die Reihe $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n}$ konvergiert.

(2) Für $x > 0$ und $r = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ mit $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$ setzt man $x^0 := 1$ und $x^r := \sqrt[q]{x^p}$ (wegen Satz I 3.26 ist x^r wohldefiniert und es gelten die üblichen Rechenregeln). Bestimmen Sie nun (z. B. mit Hilfe von (1)) alle $r \in \mathbb{Q}$, für die die Reihe $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^r}$ konvergiert.

Aufgabe 3 (3 Punkte) Es sei $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge mit $\lim\limits_{k\to\infty} k\, a_k = 0$. Zeigen Sie mittels Abelscher partieller Summation: Die Reihe $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergiert genau dann, wenn die Reihe $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} k\,(a_k - a_{k+1})$ konvergiert. Im Falle der Konvergenz stimmen die Grenzwerte der beiden Reihen überein.

Aufgabe 4 ($*$): Sei $(a_n)_{n\geq 1}$ eine reelle Folge. Zeigen Sie:

(1) Gibt es $N \in \mathbb{N}$ und $1 < c \in \mathbb{R}$ mit $a_k \neq 0$ und $\displaystyle\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| \leq 1 - \frac{c}{k}$ für alle $k \geq N$, so ist $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ absolut konvergent.

(2) Gibt es $N \in \mathbb{N}$ mit $a_k \neq 0$ und $\displaystyle\frac{a_{k+1}}{a_k} \geq 1 - \frac{1}{k}$ für alle $k \geq N$, so ist die Reihe $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ divergent.

Hinweis: Zeigen Sie, dass die Folge der Partialsummen von $\sum |a_k|$ beschränkt ist bzw. dass die harmonische Reihe eine Minorante von $\sum a_k$ ist.