LEHRSTUHL A FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. A. Krieg, T. Dern, I. Klöcker

Aachen, den 3. Dezember 1999

9. Übung zur Analysis I

Abgabe: Freitag, 10.12.1999, 12.00 Uhr

Aufgabe 1 (4 Punkte) Bestimmen Sie die Häufungspunkte der folgenden Teilmengen von $\mathbb{R}$:

(1) $[0;1) \cap \mathbb{Q}$,

(2) $\left\{ (-1)^n \left(1 + \frac{1}{n^2}\right) \middle| \, n \in \mathbb{N} \right\}$,

(3) $\left\{ \frac{1}{n} + \frac{1}{m} \middle| \, m, n \in \mathbb{N} \right\}$.

Aufgabe 2 (4 Punkte) (1) Zeigen Sie: Jede offene Menge $M \subset \mathbb{R}$ ist abzählbare Vereinigung offener Intervalle.

(2) Ist jede abgeschlossene Menge $M \subset \mathbb{R}$ abzählbare Vereinigung abgeschlossener Intervalle?

(3) Für $M \subset \mathbb{R}$ sei $H(M) \subset \mathbb{R}$ die Menge der Häufungspunkte von M. Zeigen Sie für $M, N \subset \mathbb{R}$:

(a) $M \cup H(M)$ ist abgeschlossen,

(b) $H(M) \cup H(N) = H(M \cup N)$.

Aufgabe 3 (4 Punkte) Für $a \in \mathbb{C}$, $r \geq 0$ sei $B_r(a) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - a| \leq r\}$. Seien nun $(a_n)_{n\geq 1}$ eine Folge in $\mathbb{C}$, $(r_n)_{n\geq 1}$ eine reelle Nullfolge mit $r_n > 0$ und $B_{r_{n+1}}(a_{n+1}) \subset B_{r_n}(a_n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

(1) Zeigen Sie: Es gibt genau ein $z \in \mathbb{C}$ mit $z \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} B_{r_n}(a_n)$. Für dieses z gilt $\lim_{n\to\infty} a_n = z$.

(2) Bleibt die Aussage in (1) richtig, wenn man die abgeschlossenen Kugeln $B_{r_n}(a_n)$ durch die offenen Kugeln $U_{r_n}(a_n)$ ersetzt?

Aufgabe 4 (4 Punkte) Für jedes $z \in \mathbb{C}$ wird durch

$$a_{z,1} := 0 \qquad \text{und} \qquad a_{z,n+1} := (a_{z,n})^2 + z \text{ für alle } n \in \mathbb{N}$$

rekursiv eine Folge $(a_{z,n})_{n\geq 1}$ in $\mathbb{C}$ definiert. Sei

$$M := \{ z \in \mathbb{C} \mid \text{die Folge } (|a_{z,n}|)_{n\geq 1} \text{ ist beschränkt} \}.$$

(1) Zeigen Sie: $U_{1/4}(0) \subset M$ und $M \subset U_{2+\varepsilon}(0)$ für alle $\varepsilon > 0$.

(2) Bestimmen Sie $\inf \{ r \in (0,\infty) \mid M \subset U_r(0) \}$ und $\sup \{ r \in (0,\infty) \mid U_r(0) \subset M \}$.