Lehrstuhl A für Mathematik
Prof. Dr. A. Krieg, T. Dern, I. Klöcker

Aachen, den 26. November 1999

8. Übung zur Analysis I

Abgabe: Freitag, 3.12.1999, 12.00 Uhr

Aufgabe 1 (5 Punkte) Sei $(a_n)_{n\geq 1}$ eine reelle Folge. Beweisen oder widerlegen Sie folgende Aussagen:
(1) $(a_n)_{n\geq 1}$ ist genau dann eine Cauchy-Folge, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ existiert mit $|a_n - a_N| < \varepsilon$ für alle $n \geq N$.
(2) $(a_n)_{n\geq 1}$ ist genau dann eine Cauchy-Folge, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ existiert mit $|a_n - a_{n+1}| < \varepsilon$ für alle $n \geq N$.
(3) Es gilt $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$ genau dann, wenn zu jedem $M > 0$ unendlich viele $n \in \mathbb{N}$ existieren mit $a_n \geq M$.
(4) Es gilt $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$, wenn zu jedem $M > 0$ unendlich viele $n \in \mathbb{N}$ existieren mit $a_n \leq -M$.
(5) Ist $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n < M$ für ein $M \in \mathbb{R}$, so existiert ein $N \in \mathbb{N}$ mit $a_n \leq M$ für alle $n \geq N$.

Aufgabe 2 (3 Punkte) Sei $q \in (0;1)$ und $(a_n)_{n\geq 1}$ eine Folge mit der Eigenschaft

$$|a_{n+2} - a_{n+1}| < q\,|a_{n+1} - a_n| \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Zeigen Sie mit Hilfe des Cauchy-Kriteriums, dass $(a_n)_{n\geq 1}$ konvergiert. Folgt die Konvergenz auch noch, wenn man $q = 1$ zuläßt?

Aufgabe 3 (4 Punkte) (1) Sei $(a_n)_{n\geq 1}$ eine Folge mit $a_n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Ferner gelte $\limsup\limits_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1$. Zeigen Sie, dass $(a_n)_{n\geq 1}$ eine Nullfolge ist.
(2) Sei $(a_n)_{n\geq 1}$ eine Folge mit $a_n > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = a$. Zeigen Sie, dass die Folge $(\sqrt[n]{a_n})_{n\geq 1}$ gegen a konvergiert. (Hinweis: AGM-Ungleichung, Aufg. 3.2 und Aufg. 7.6).

Aufgabe 4 (4 Punkte) (1) Zeigen Sie, dass $\left(\sum\limits_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1}\right)_{n\geq 1}$ eine Cauchy-Folge ist.
(2) Sei R eine rationale Funktion. Bestimmen Sie $\lim\limits_{n\to\infty} R(n)$ und $\liminf\limits_{n\to\infty} R(-n)$.
(3) Zeigen Sie $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!} = \infty$ und $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} = e$, z. B. mit Hilfe von Aufg. 3 (2).

Aufgabe 5 ($*$): (1) Die Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ sei nach oben beschränkt. Zeigen Sie

(i) $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} (\sup\{a_k \mid k \geq n\})$,

(ii) $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n = -\liminf\limits_{n\to\infty} (-a_n)$.

(2) Die Folgen $(a_n)_{n\geq 1}$, $(b_n)_{n\geq 1}$ seien beschränkt. Zeigen Sie

(i) $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n + \liminf\limits_{n\to\infty} b_n \leq \liminf\limits_{n\to\infty} (a_n + b_n) \leq \liminf\limits_{n\to\infty} a_n + \limsup\limits_{n\to\infty} b_n$,

(ii) $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n + \limsup\limits_{n\to\infty} b_n \geq \limsup\limits_{n\to\infty} (a_n + b_n) \geq \liminf\limits_{n\to\infty} a_n + \limsup\limits_{n\to\infty} b_n$.