Lehrstuhl A für Mathematik
Prof. Dr. A. Krieg, T. Dern, I. Klöcker

Aachen, den 22. Oktober 1999

3. Übung zur Analysis I

Abgabe: Dienstag, 2.11.1999, 10.00 Uhr

Organisatorisches: Bitte beachten Sie folgende Änderungen:

Montag, 15.45–16.30 Uhr:	Übung im Hörsaal EPh (bisher Grün)
Freitag, 11.45–13.15 Uhr:	Vorlesung im Hörsaal I (bisher Grün)

Aufgabe 1 (4 Punkte): Zeigen Sie durch Induktion:

(1) Ist $n \in \mathbb{N}$ und sind $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}_+^*$, so ist $\left(\sum\limits_{j=1}^{n} x_j\right)\left(\sum\limits_{j=1}^{n} \frac{1}{x_j}\right) \geq n^2$.

(2) Für alle $m, n \in \mathbb{N}_0$ mit $n \geq m$ ist $\sum\limits_{k=m}^{n} \binom{k}{m} = \binom{n+1}{m+1}$.

Aufgabe 2 (4 Punkte): Zeigen Sie: Ist $n \in \mathbb{N}$ und sind $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}_+^*$, so gilt (Ungleichung zwischen geometrischem und harmonischem Mittel)

$$\sqrt[n]{\prod_{j=1}^{n} a_j} \geq n \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{a_j}\right)^{-1}.$$

Aufgabe 3 (4 Punkte): Sei K ein Körper und seien $a, b, c, d \in K$. Folgern Sie aus den Körperaxiomen:
(1) $\quad a \neq 0 \quad \Longrightarrow \quad (-a)^{-1} = -(a^{-1})$,
(2) $\quad a \neq 0$ und $b \neq 0 \quad \Longrightarrow \quad (a/b)^{-1} = (a^{-1})/(b^{-1})$.
(3) $\quad b \neq 0$ und $d \neq 0 \quad \Longrightarrow \quad a/b + c/d = (ad + bc)/(bd)$.

Aufgabe 4 (4 Punkte): Sei K ein angeordneter Körper und seien $a, b \in K$. Folgern Sie aus den Körper- und Anordnungsaxiomen:
(1) $\quad a < b \quad \Longrightarrow \quad a < \frac{a+b}{2} < b$.
(2) $\quad$ Es gibt keinen angeordneten Körper mit endlich vielen Elementen.
(3) $\quad a < b \quad \Longleftrightarrow \quad a^3 < b^3$.

Aufgabe 5 (4 Punkte): $(K, +, \cdot)$ erfülle alle Körperaxiome bis auf das Kommutativgesetz der Addition. Zeigen Sie, dass $(K, +, \cdot)$ dann bereits ein Körper ist.

Aufgabe 6 ($*$): Sei $(K, +, \cdot)$ ein Körper und $k \in K$. Auf $K \times K$ seien eine Addition $\oplus$ und eine Multiplikation $\odot$ erklärt durch

$$(a, b) \oplus (c, d) := (a + c, b + d) \qquad \text{und} \qquad (a, b) \odot (c, d) := (ac + kbd, ad + bc).$$

Zeigen Sie:
(1) $\quad$ Bis auf die Existenz des multiplikativen Inversen sind alle Körperaxiome für $(K \times K, \oplus, \odot)$ erfüllt.
(2) $\quad (K \times K, \oplus, \odot)$ ist genau dann ein Körper, wenn $k \neq z^2$ für alle $z \in K$ gilt.
(3) $\quad (K \times K, \oplus, \odot)$ ist i. a. kein angeordneter Körper.