LEHRSTUHL A FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. A. Krieg

Aachen, den 6. April 2000

2. Klausur zur Analysis I, WS 99/00

Aufgabe 1: (4 Punkte) Zeigen Sie durch Induktion: Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist

$$\binom{2n}{n} \geq \frac{4^n}{n+1}.$$

Aufgabe 2: (2+3 Punkte)
Sei $a \in \mathbb{R}$. Untersuchen Sie die Folgen auf Konvergenz und bestimmen Sie ggf. ihren Grenzwert:

a) $$\left(\frac{(an+1)^2}{n^2+a^2}\right)_{n\geq 1},$$ b) $$\left(\frac{n}{n^2+1}\log(\frac{n^2+1}{n})\right)_{n\geq 1}.$$

Aufgabe 3: (5 Punkte)
Die Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ sei rekursiv definiert durch $a_1 = 1$ und $a_{n+1} = \dfrac{1+\sqrt{2a_n}}{4}$, $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass die so definierte Folge monoton und konvergent ist. Bestimmen Sie ihren Grenzwert.

Aufgabe 4: (4 Punkte)
Bestimmen Sie den Konvergenzradius der Potenzreihe $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{2n^2+1} x^n$.

Aufgabe 5: (2+3 Punkte)
a) Untersuchen Sie die Reihe $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(\sqrt{k}\pi)}{k^2+1}$ auf Konvergenz und absolute Konvergenz.

b) Für welche $x \in \mathbb{R}$ konvergiert die Reihe $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{1+x^{2n}}$?

Aufgabe 6: (5 Punkte)
Untersuchen Sie die Funktion $f : (0;\infty) \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \left(1+\frac{1}{x}\right)^x$, auf Monotonie und bestimmen Sie die Grenzwerte $\lim_{x\downarrow 0} f(x)$ und $\lim_{x\to\infty} f(x)$.

Aufgabe 7: (5 Punkte)
Zeigen Sie: Für $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| < 1$ ist

$$\frac{1}{2}\log\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{2k+1}.$$

Aufgabe 8 (5 Punkte) Sei $q \in (0;1)$ und $(a_n)_{n\geq 1}$ eine Folge in $\mathbb{C}$ mit der Eigenschaft

$$|a_{n+2} - a_{n+1}| < q\,|a_{n+1} - a_n| \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Zeigen Sie mit Hilfe des Cauchy-Kriteriums, dass $(a_n)_{n\geq 1}$ konvergiert.

Aufgabe 9 (5 Punkte) Zeigen Sie: arsinh : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist differenzierbar mit Ableitung

$$\operatorname{arsinh}'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Aufgabe 10 (4 Punkte)
Seien $a, b, c > 0$. Bestimmen Sie den Grenzwert $\lim\limits_{x \to c} \dfrac{x^a - c^a}{x^b - c^b}$.

Aufgabe 11 (3+2 Punkte)
Sei $\varnothing \neq D \subset \mathbb{R}$. Zeigen Sie:
a) Sind $f : D \to \mathbb{R}$ und $g : f(D) \to \mathbb{R}$ gleichmäßig stetig, so ist $g \circ f$ gleichmäßig stetig.
b) Ist $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion, zu der ein $c > 0$ existiert mit der Eigenschaft

$$|f(x) - f(y)| \leq c\,|x - y| \quad \text{für alle } x, y \in D,$$

so ist f gleichmäßig stetig.

Aufgabe 12: (4 Punkte)
Sei $D \subset \mathbb{R}$ offen und $f : D \to \mathbb{R}$. Zeigen Sie: Ist f in $x_0 \in D$ differenzierbar, so gilt

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0 - h)}{2h} = f'(x_0).$$

Folgt aus der Existenz des Limes auch die Differenzierbarkeit von f in x_0?

Aufgabe 13: (2+2 Punkte)
a) Formulieren Sie die beiden folgenden Sätze:
  i) Bolzano-Weierstraß (für Folgen),
  ii) Identitätssatz für Potenzreihen.
b) Geben Sie Definition der folgenden Begriffe an:
  i) offene Menge (in $\mathbb{R}$),
  ii) Injektivität.