Lehrstuhl A für Mathematik — Aachen, den 18. Februar 2000
Prof. Dr. A. Krieg

Klausur zur Analysis I, WS 99/00

Aufgabe 1: (4 Punkte)
Seien $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ beliebig oft differenzierbar. Zeigen Sie durch Induktion: Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ ist

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}.$$

Aufgabe 2: (3+3 Punkte)
Sei $a \in \mathbb{R}$. Untersuchen Sie die Folgen auf Konvergenz und bestimmen Sie ggf. ihren Grenzwert:

a) $\left(\dfrac{a^{2n}-1}{a^{2n}+1}\right)_{n\geq 1}$, *b)* $\left((\sqrt{n^2+1}-n)\log(n)\right)_{n\geq 1}$.

Aufgabe 3: (6 Punkte)
Die Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ sei rekursiv definiert durch $a_1 = 0$ und $a_{n+1} = e^{a_n - 1}$, $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass die so definierte Folge konvergiert, und bestimmen Sie ihren Grenzwert.
Hinweis: Verwenden Sie $e^y \geq y + 1$ für alle $y \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 4: (4 Punkte)
Berechnen Sie den Wert der Reihe $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{n+1}{3^n}$.

Aufgabe 5: (3+3 Punkte)
Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz und absolute Konvergenz:

a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{5^k}\binom{2k}{k}$, *b)* $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \frac{1}{2k-\frac{1}{k}}$.

Aufgabe 6: (6 Punkte)
Untersuchen Sie die Funktion

$$f : [0;\infty) \to \mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases} x^{-x}, & \text{falls } x > 0, \\ 1, & \text{falls } x = 0, \end{cases}$$

auf Stetigkeit und Differenzierbarkeit, bestimmen Sie maximale Intervalle, auf denen f monoton ist, sowie alle (lokalen und globalen) Extremstellen von f.

Aufgabe 7: (5 Punkte)
Zeigen Sie durch Vergleich der Ableitungen: Für $x > 0$ gilt

$$\arctan(\tfrac{1}{x}) = \tfrac{\pi}{2} - \arctan(x)$$

Aufgabe 8 (3 Punkte)
Sei $\varnothing \neq M \subset \mathbb{R}$ abgeschlossen, $f : M \to \mathbb{R}$ stetig, $c \in \mathbb{R}$ und $N_c = \{x \in M \mid f(x) = c\}$. Zeigen Sie, dass N_c abgeschlossen ist.

Aufgabe 9 (2+2 Punkte)
Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{\pi - 2x}{3} + \cos(x + \frac{\pi}{2})e^x$. Zeigen Sie:
a) f hat auf $[0; \frac{\pi}{2}]$ mindestens eine Nullstelle.
b) f hat auf $[0; \frac{\pi}{2}]$ genau eine Nullstelle.

Aufgabe 10 (4 Punkte)
Bestimmen Sie $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{e^{-x}}{\sin(\frac{1}{x})}$.

Aufgabe 11 (4 Punkte)
Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ stetig. Zeigen Sie, dass ein $n \in \mathbb{Z}$ existiert mit $f(\mathbb{R}) \subset (n; n+1)$.

Aufgabe 12 (4 Punkte)
Sei $f : [0; \infty) \to \mathbb{R}$ stetig. Zeigen Sie: Falls $\lim\limits_{x \to \infty} f(x)$ existiert, dann ist f gleichmäßig stetig.

Aufgabe 13: (2+2 Punkte)
a) Formulieren Sie die beiden folgenden Sätze:
   i) Mittelwertsatz der Differentialrechnung,
   ii) Satz von Cauchy-Hadamard.
b) Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein nicht-leeres Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ eine Funktion.
   a) Definieren Sie, wann f konvex heißt.
   b) Definieren Sie, wann f in einem inneren Punkt von I **nicht** stetig ist.