LEHRSTUHL A FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. A. Krieg, A. Marschner

Aachen, den 28. Oktober 2002

3. Übung Siegelsche Modulformen

Abgabe: Montag, 4.11.2002, 12.00 Uhr

Aufgabe 1 (**Minima betimmter Matrizen**)(5+3* Punkte): Gegeben seien die Matrizen

a) $R = E + ee^{tr} \in \mathrm{Sym}(n;\mathbb{R})$ mit $e := (1,\dots,1)^{tr}$,

b) $S = (n+1)E - ee^{tr} \in \mathrm{Sym}(n;\mathbb{R})$,

c) $T = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ b & c \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{Sym}(n;\mathbb{R})$ mit $0 \le 2b < a \le c$.

Zeigen Sie, dass R, S und T positiv definit sind, und bestimmen Sie ihre Minima sowie die Jacobi(Cholesky)-Zerlegung. Sind die Matrizen reduziert? Als weitergehende Aufgabe kann bei Interesse für die nicht-reduzierten Matrizen M auch eine Matrix $U \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{Z})$ bestimmt werden, so dass $M[U] \in \mathcal{R}_n$. Für diesen Teil wird es wahrscheinlich keine Musterlösung geben.

Aufgabe 2 (**Reduzierte Matrizen**)(3 Punkte):

a) $\mathrm{diag}(d_1,\dots,d_n)$ ist genau dann in $\mathcal{R}_n$ enthalten, wenn $0 < d_1 \le \dots \le d_n$ gilt.

b) Es sei $Y = D[B]$ die Jacobizerlegung von $Y \in \mathcal{P}_n$. Für $j = 1,\dots,n$ bezeichne D_j bzw. B_j den $(n-j+1)$-reihigen (quadratischen) Block von D bzw. B rechts unten. Zeigen Sie:
$Y \in \mathcal{R}_n$ ist äquivalent zu den Bedingungen

$$\begin{aligned} |b_{kl}| &\le \frac{1}{2} \quad \text{für alle} \quad 1 \le k < l \le n, \\ b_{j,j+1} &\ge 0, \\ d_j &= \mu(D_j[B_j]) \quad \text{für alle} \quad 1 \le j < n. \end{aligned}$$

Aufgabe 3 (**Wichtige Untergruppe**)(7 Punkte): Für $0 \le r \le n$ sei die folgende Untergruppe von Σ_n

$$\Sigma_{n,r} = \left\{ M \in \Sigma_n;\ M = \begin{pmatrix} * & * \\ 0^{(n-r,n+r)} & * \end{pmatrix} \right\}.$$

Wir zerlegen die Blöcke in die Form

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{pmatrix}, \quad A_1 \in \mathbb{R}^{(r,r)},$$

und analog auch für B, C, D. Zeigen Sie

a) Für $M \in \Sigma_n$ ist $M \in \Sigma_{n,r}$ äquivalent zu den Bedingungen

$$A_M = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ A_3 & A_4 \end{pmatrix}, C_M = \begin{pmatrix} C_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, D_M = \begin{pmatrix} D_1 & D_2 \\ 0 & D_4 \end{pmatrix},$$

und die Abbildung

$$\Sigma_{n,r} \to \Sigma_r \times \mathrm{GL}(n;\mathbb{R}), \quad M \mapsto \left(\begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ C_1 & D_1 \end{pmatrix}, D_4 \right),$$

ist ein Gruppenhomomorphismus.

b) Für $\lambda, \mu \in \mathbb{R}^{(r,n-r)}$ und $\kappa \in \mathbb{R}^{(n-r,n-r)}$ sei nun

$$(g,\kappa) = (\lambda,\mu,\kappa) = \left(\begin{array}{cc|cc} E & 0 & 0 & \mu \\ \lambda^{tr} & E & \mu^{tr} & \kappa \\ \hline \multicolumn{2}{c|}{\multirow{2}{*}{0}} & E & -\lambda \\ & & 0 & E \end{array}\right), \quad g = \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie: Eine solche Matrix ist genau dann symplektisch, falls $\kappa + \mu^{tr}\lambda$ symmetrisch ist, und der Kern $H^{n,r}$ der Abbildung aus a) besteht aus genau diesen Matrizen. Bestimmen Sie ferner eine explizite Formel für das Produkt zweier solcher Matrizen.

c) Wir definieren nun mit Hilfe der in Übung 2 Aufgabe 2 definierten Homomorphismen einen Schnitt der Abbildung aus (i) vermöge

$$\Sigma_r \times \mathrm{GL}_(n-r;\mathbb{R}) \to \Sigma_{n,r}, \left(\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}, U\right) \mapsto \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \times \mathrm{rot}(U)$$

Zeigen Sie: Diese Abbildung ist ein Gruppenhomomorphismus und die Komposition

$$\Sigma_r \times \mathrm{GL}(n-r;\mathbb{R}) \to \Sigma_{n,r} \to \Sigma_r \times \mathrm{GL}(n-r;\mathbb{R})$$

mit der Abbildung aus a) ist die Identität. (Dies bedeutet genau, dass es sich um einen Schnitt handelt.) Jedes $g \in \Sigma_{n,r}$ besitzt eine eindeutige Zerlegung der Form $g = (\lambda,\mu,\kappa)\cdot(M \times U)$.

Aufgabe 4 (**Paramodulare Gruppe I**)(5 Punkte): Sei $n \in \mathbb{N}$ und $P^t = P \in \mathrm{GL}(n;\mathbb{Q})$.
Definition 1 Definiere die folgende Verallgemeinerung der symplektischen Gruppe:

$$J_P := \begin{pmatrix} 0 & P \\ -P & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}(2n;\mathbb{R}), \quad \Sigma(n,P) := \{M \in \mathrm{Mat}(2n;\mathbb{R}); J_P[M] = J_P\}.$$

Die paramodulare Gruppe (ganze Realisierung) vom Grad n ist $\widehat{\Gamma}(P) := \Sigma(n,P) \cap \mathrm{Mat}(2n;\mathbb{Z})$. Man zeige die Verallgemeinerung von Lemma 2.2 der Vorlesung

Lemma 2.2 $\Sigma(n,P)$ ist eine Untergruppe von $\mathrm{GL}(2n;\mathbb{R})$. Es gilt $\Sigma(1,P) = \mathrm{SL}(2;\mathbb{R})$. Für $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ in der üblichen Blockzerlegung ist äquivalent:

a) $M \in \Sigma(n,P)$.

b) $J_P^{-1} M^t J_P \in \Sigma(n,P)$.

c) $A^t PC$, $B^t PD$ sind symmetrisch und $A^t PD - C^t PB = P$.

d) $DP^{-1}C^t$, $BP^{-1}A^t$ sind symmetrisch und $DP^{-1}A^t - CP^{-1}B^t = P^{-1}$.

In diesem Falle bestimme man M^{-1}. Man zeige, dass $\widehat{\Gamma}(P)$ konjugiert zu der rationalen Realisierung

$$\Gamma(P) := \left\{ \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \mathrm{Sp}(n;\mathbb{R});\ A, BP, P^{-1}C, P^{-1}DP \in \mathrm{Mat}(n,\mathbb{Z}) \right\} \subset \mathrm{Sp}(n,\mathbb{Q})$$

ist. Damit hat man in natürlicherweise wieder eine Operation auf $\mathbb{H}_n$. Wer Lust hat, kann sich Gedanken machen, wie diese Operation in der ganzen Realisierung aussieht.