LEHRSTUHL A FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. A. Krieg, A. Marschner

Aachen, den 15. Oktober 2002

1. Übung Siegelsche Modulformen

Abgabe: Montag, 21.10.2002, 12.00 Uhr

Informationen zum Übungsbetrieb: Jeweils vor der letzten Vorlesung der Woche wird ein Übungsblatt ausgegeben. Die bearbeiteten Lösungen sind Montag eine Woche später, im Kasten vor dem Sekretariat des Lehrstuhls, Raum 153, Hauptgebäude (HG) abzugeben. Die Übungen können in Zweiergruppen bearbeitet werden. Die korrigierten Lösungen werden dann in der Übung am Mittwoch zurückgegeben. Dort wird eine Lösung der Aufgaben vorgestellt. Die Übungsblätter zu Siegelsche Modulformen sind auch im WWW erhältlich (`http://www.mathA.rwth-aachen.de/lehre/WS02/Modulformen`).
Außerdem stehen für alle Fragen und Probleme rund um die Vorlesung Prof. Dr. A. Krieg (nach der Vorlesung sowie nach Vereinbarung, auch per E-Mail möglich, Raum 153, HG) und der Assistent A. Marschner (nach der Übung sowie nach Vereinbarung, Raum 155, HG) zur Verfügung. Sie können die Mitarbeiter auch per E-Mail erreichen: krieg@mathA.rwth-aachen.de, axel.marschner@mathA.rwth-aachen.de.
Den Schein über die Teilnahme an den Übungen erhält, wer mindestens einmal vorrechnet und mindestens 50 Prozent der Übungspunkte erreicht.

Abgabe dieser Übung: Die Aufgaben 1 bis 3 sind wie oben erwähnt bis nächsten Montag abzugeben, die Aufgaben 4 und 5 sind Bestandteil der zweiten Übung.

Aufgabe 1 (**symmetrische Matrizen als formal reelle Jordan-Algebra**)(7 Punkte):
Definition 1: Sei $\mathbb{K}$ ein Körper mit Charakteristik ungleich 2. Ein $\mathbb{K}$-Vektorraum J zusammen mit einer Komposition $J \times J \to J$, $(u,v) \mapsto u \circ v$ heißt Jordan-Algebra, falls für alle $u, v, w \in J$, $\alpha \in K$ gilt

$$\begin{aligned} u \circ v &= v \circ u, \\ u \circ (v+w) &= u \circ v + u \circ w, \\ (\alpha u) \circ v &= \alpha(u \circ v), \end{aligned}$$

sowie

$$u \circ (u^2 \circ v) = u^2 \circ (u \circ v) \quad \text{mit} \quad u^2 = u \circ u.$$

Definition 2: Ist $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ so nennt man J eine reelle Jordan-Algebra. Eine reelle Jordan-Algebra heißt formal reell, falls aus $u \circ u + v \circ v = 0$ folgt $u = v = 0$. Zwei Elemente u, v einer Jordan-Algebra J nennt man kommutierend, wenn

$$u \circ (v \circ x) = v \circ (u \circ x) \quad \text{für alle} \quad x \in J$$

gilt. Existiert eine Einheit $c \in J$ bezüglich der Komposition, so nennt man ein Element $u \in J$ invertierbar, wenn ein $v \in J$ existiert, so dass u, v kommutieren und $u \circ v = c$ ist.
Für $M, N \in \mathrm{Sym}(n;\mathbb{R})$ definiere das symmetrische Produkt:

$$M * N := \frac{1}{2}(MN + NM).$$

Man zeige, dass $J = (\mathrm{Sym}(n;\mathbb{R}), *)$ eine formal reelle Jordan Algebra mit Einheit E ist. Zusätzlich zeige man:

a) S ist in J invertierbar genau dann, wenn $\det S \neq 0$. Die Inversen in J und $(\mathrm{Mat}(n;\mathbb{R}),\cdot)$ stimmen überein.

b) Sei $\mathcal{P}_n$ die Menge der positiv definiten Matrizen. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}_n &= \{S * S; S \in \mathrm{Sym}(n;\mathbb{R}) \text{ invertierbar}\}, \\
\overline{\mathcal{P}_n} &= \{S * S; S \in \mathrm{Sym}(n;\mathbb{R})\}, \\
\mathcal{P}_n &= \overset{\circ}{\overline{\mathcal{P}_n}}.
\end{aligned}$$

Aufgabe 2 (**$\mathcal{P}_n$ als Positivitätsbereich**)(8 Punkte):
$\mathcal{P}_n$ bildet ein Positivitätsbereich von $J = (\mathrm{Sym}(n;\mathbb{R}), *)$, d. h.

a) $\mathcal{P}_n$ ist offen und nicht-leer.

b) Sei $A, B \in \mathcal{P}_n$, dann gilt $\mathrm{Spur}(AB) > 0$.

c) Ist $S \in \mathrm{Sym}(n;\mathbb{R})$ und $\mathrm{Spur}(AS) > 0$ für alle $A \in \overline{\mathcal{P}_n}$, $A \neq 0$, so folgt $S \in \mathcal{P}_n$.

Zusätzlich gilt:

d) Sei $S \in \mathrm{Sym}(n;\mathbb{R})$ mit der Eigenschaft

$$\mathrm{Spur}(SP) > 0 \quad \text{für alle} \quad P \in \mathcal{P}_n.$$

Zeigen Sie $S \in \overline{\mathcal{P}_n}$, $S \neq 0$.

e) Sei $S \in \overline{\mathcal{P}_n} \setminus \mathcal{P}_n$. Zeigen Sie, dass ein $0 \neq P \in \overline{\mathcal{P}_n}$ gibt mit

$$\mathrm{Spur}(SP) = 0.$$

Aufgabe 3 (**eindeutige Quadratwurzel**)(5 Punkte):
Zu jedem $S \in \mathcal{P}_n$ gibt es eine eindeutig bestimmtes $P \in \mathcal{P}_n$ mit $S = P^2$. Gilt dies auch, wenn man positiv semidefinite Matrizen betrachtet?

Aufgabe 4 (**Grad einer Determinante**)(4 Punkte):
Sei $S \in \mathrm{Sym}(n;\mathbb{R})$, $a \in \mathbb{R}^n$. Dann ist

$$p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad p(\lambda) := \det(S + \lambda a a^t)$$

ein Polynom (in λ) von einem Grad kleiner gleich 1.

Aufgabe 5 (**Zusammenhang zwischen Matrix und Diagonale**)(4 Punkte):
Sei $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$ und $S \in \mathrm{Sym}(n;\mathbb{R})$ und $S_D := \mathrm{diag}(s_{11}, \ldots, s_{nn})$ die Diagonale von S. Zeigen Sie

$$\begin{aligned}
S > 0 \quad &\Rightarrow \quad nS_D > S, \\
S \geq 0 \quad &\Rightarrow \quad nS_D \geq S.
\end{aligned}$$

Gilt dies auch für $n = 1$?