

7. Übung zu Ebene Geometrie

Abgabe: 9. 12. 2002, bis 16.10 Uhr im Kasten vor Raum HG 155 oder zu Übungsbeginn beim Übungsleiter

Generalvoraussetzung: In den folgenden Aufgaben sei \mathbb{K} ein Körper und $(\mathbb{P}, \mathbb{G}) = \mathbb{A}_2(\mathbb{K})$ die betrachtete affine Ebene.

Aufgabe 27 (Scherensatz) Es seien F, G zwei sich in genau einem Punkt schneidende Geraden, sowie a, c, a' und c' Punkte auf $F \setminus G$ und b, d, b' und d' Punkte auf $G \setminus F$. Zeigen Sie: Aus $a \vee b \parallel a' \vee b'$, $b \vee c \parallel b' \vee c'$ und $c \vee d \parallel c' \vee d'$ folgt $a \vee d \parallel a' \vee d'$.

Aufgabe 28 Seien a, b und c drei kollineare, paarweise verschiedene Punkte der reellen Koordinatenebene $\mathbb{A}_2(\mathbb{R})$, so dass es positive α und β in \mathbb{R}^+ mit $\alpha + \beta = 1$ und

$$c = \alpha a + \beta b$$

gibt. Zeigen Sie für jede Vektornorm $\|\circ\|$ des \mathbb{R}^2 , dass

$$\frac{\|c - b\|}{\|c - a\|} = \frac{\alpha}{\beta}$$

gilt.

Aufgabe 29 Sei φ eine Automorphismus von $\mathbb{A}_2(\mathbb{K})$. Zeigen Sie die Äquivalenz von

(i) $\varphi \in \text{Aff}_2(\mathbb{K})$

(ii) Für alle kollinearen, paarweise verschiedenen a, b, c ist $\varphi(a)\varphi(c)\varphi(b) = acb$.

Hinweis: Sie könnten zuerst zeigen, dass für einen Körperautomorphismus σ und $\varphi(x) := \begin{pmatrix} \sigma(x_1) \\ \sigma(x_2) \end{pmatrix}$ die Aussage (ii) zu (i') $\varphi = \text{id}$ äquivalent ist.

Aufgabe 30 (Zeichenaufgabe) Fertigen Sie mit GEONEX^T eine Zeichnung zur reellen Parallelenversion des Satzes von Pascal an:

Satz von Pascal (Parallelen-Version, \mathbb{R}) Seien a, b und c drei kollineare Punkte im \mathbb{R}^2 , sowie u, v und w drei paarweise linear unabhängige Vektoren, so liegen $p := G_{a,v} \wedge G_{b,u}$, $q := G_{b,w} \wedge G_{c,v}$ und $r := G_{c,u} \wedge G_{a,w}$ auf einer Geraden.

Schicken Sie ein Email mit ihrer Zeichnung¹ via Email an sebastian.mayer@mathA.rwth-aachen.de (oder geben Sie einen Ausdruck ihrer Zeichnung inklusive ihrer Vermutung und des Konstruktionsprotokolles ab).

¹Am Besten zeichnen Sie u, v und w an einen Punkt (z.B. 0) und wählen dann für die jeweilige Richtung einen Stellvertreter. Wählen Sie für u und seine Stellvertreter, sowie für die dadurch definierten Geraden, eine andere Farbe als für v bzw. w und Stellvertreter.