LEHRSTUHL A FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. S. Walcher,
Dipl.-Math. S. Mayer

Aachen, den 25. November 2002

6. Übung zu Ebene Geometrie

Abgabe: 2. 12. 2002, bis 16.10 Uhr im Kasten vor Raum HG 155 oder zu Übungsbeginn beim Übungsleiter

Generalvoraussetzung: In den folgenden Aufgaben sei $\mathbb{K}$ ein Körper und $(\mathbb{P},\mathbb{G}) = \mathbb{A}_2(\mathbb{K})$ die betrachtete affine Ebene.

Aufgabe 23 Es seinen F und G zwei nicht-parallele Geraden und $p = F \wedge G$ ihr Schnittpunkt. Nach Vorlesung gibt es dann affine Funktionen $\phi, \psi : \mathbb{K}^2 \to \mathbb{K}^2$ mit:

$$F = \{x \in \mathbb{K}^2 \mid \phi(x) = 0\}$$
$$G = \{x \in \mathbb{K}^2 \mid \psi(x) = 0\}$$

Zeigen sie, dass es für jede Gerade H durch p ein Paar $(\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2 \setminus \{(0,0)^t\}$ gibt, so dass:

$$H = \{x \in \mathbb{K}^2 \mid \alpha\,\phi(x) + \beta\,\psi(x) = 0\}$$

Aufgabe 24 Zeigen Sie für beliebige a, b, c und x in $\mathbb{K}^2$:

a) $[a,b,c] = [a,b,x] + [b,c,x] + [c,a,x]$

b) $[a,b,c]x = [b,c,x]a + [c,a,x]b + [a,b,x]c$

Aufgabe 25 Seien a, b und c drei Punkte in $\mathbb{K}^2$ und α, β und γ in $\mathbb{K}$ beliebig gegeben. Dann sind $a' := \alpha b + (1-\alpha)c$, $b' := \beta c + (1-\beta)a$ und $c' := \gamma a + (1-\gamma)b$ drei weitere Punkte in $\mathbb{K}^2$.

a) Beweisen Sie: $[a',b',c'] = (1 - \alpha - \beta - \gamma + \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha)[a,b,c]$

b) Fertigen Sie für eine nicht-triviale Wahl von a, b, c, α, β und γ eine Hand-Skizze für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ an.

c) Verifizieren Sie für den Fall $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ mittels bekannter Tatsachen der Linearen Algebra, dass $\frac{1}{2}|[a,b,c]|$ die Fläche des Dreiecks abc ist. Interpretieren Sie damit die Gleichung aus a) geometrisch, insbesondere Anhand von (einem) geeigneten Beispiel(en) für α, β und γ.

Aufgabe 26 (Zeichenaufgabe) a) Fertigen Sie mit GEONE$_X$T folgende Zeichnung an:

Es seinen F, G und H drei paarweise verschiedene Geraden in $\mathbb{A}_2(\mathbb{R})$, die sich in dem Punkt P schneiden. Weiter seien die Punkte $a, a' \in F$, $b, b' \in G$ und $c, c' \in H$ mit $a \neq a'$, $b \neq b'$ und $c \neq c'$ derart, dass die drei Schnittpunkte

$$\begin{aligned} x &= (a \vee b) \wedge (a' \vee b') \\ y &= (b \vee c) \wedge (b' \vee c') \text{ und} \\ z &= (c \vee a) \wedge (c' \vee a') \end{aligned}$$

existieren.

b) Was vermuten Sie über die Lage von x, y und z? Das Verschieben von a, b, c, a', b' und c' entlang der Geraden G, F und H kann hierzu hilfreich sein, eventuell verstecken Sie einige der Geraden $a \vee b$, $a' \vee b'$, ... um etwas Übersichtlichkeit zu gewährleisten.

c) Schicken Sie ein Email mit ihrer Vermutung und der zugehörigen Zeichnung via Email an sebastian.mayer@mathA.rwth-aachen.de (oder geben Sie einen Ausdruck ihrer Zeichnung inclusive ihrer Vermutung und des Konstruktionsprotokolles ab).