Lehrstuhl A für Mathematik
Prof. Dr. S. Walcher
Daniela Dossing

10. Übung zur Mathematik für Biologen

(Abgabe: Donnerstag, den 23.1.2003, vor der Übung)

Hausaufgaben

Aufgabe 1: Ein Xenobiotikum lagert sich im Fettgewebe ein und wird dort mit einer Rate abgebaut, die proportional zur vorhandenen Menge der Substanz ist.
a) Zum Zeitpunkt $t = 0$ (Zeiteinheit: Stunden) wird das Gewebe mit einer gewissen Menge des Xenobiotikums kontaminiert. Anschließend findet der Abbau im Gewebe statt. Eine Messung liefert folgende Werte für die Gesamtmasse m des Xenobiotikums:

$$m(5) = 0,2987, m(40) = 0,2882, \text{ Einheit: Gramm.}$$

Bestimmen Sie die Funktion $m(t)$, welche die Masse des Xenobiotikums als Funktion der Zeit beschreibt. Wie groß war die Masse zu Beginn, d.h. zum Zeitpunkt $t = 0$? Ab welchem Zeitpunkt ist weniger als ein Milligramm des Xenobiotikums im Gewebe vorhanden?
b) Nun wird das Xenobiotikum gleichmäßig mit einer Rate von 0,1g/h zugeführt. Welcher Gleichung genügt die Masse $m(t)$ in diesem Fall? Berechnen Sie $m(100)$ und $m(200)$. Überschreitet $m(t)$ den Wert von 30g? (Tip: Benutzen Sie die bereits bekannten Informationen aus Teil a)!)
c*) Unter den Bedingungen aus Teil a) hat man zusätzlich noch folgende Meßwerte zur Vefügung:

$$m(60) = 0,2808, m(120) = 0,2677.$$

Wie gehen Sie vor, um die Abbaurate möglichst gut zu bestimmen?

Aufgabe 2: Gegeben sei eine Funktion f. Untersuchen Sie die Funktion hinsichtlich folgender Gesichtspunkte:

- Definitionsbereich
- Grenzwerte an den Rändern des Definitionsbereiches (auch $\pm\infty$)
- Nullstellen
- lokale Extrema
- Monotoniebereiche
- Skizze

a) $f(x) = \frac{\ln x - 2}{x}$ b) $f(x) = \ln(\frac{x^2}{4} + 1)$

c) $f(x) = x \cdot \ln x$

Präsenzaufgaben

Aufgabe 1: Verfahren Sie wie in Aufgabe 1a) der Hausaufgaben, wobei jetzt $m(0) = 0,99$ und $m(100) = 0,83$ als Meßwerte vorgegeben sind.

Aufgabe 2: Gegeben sei eine Funktion f. Untersuchen Sie die Funktion hinsichtlich derselben Gesichtspunkte wie in Aufgabe 2 der Hausaufgaben.

a) $f(x) = \frac{1}{\ln x}$ b) $f(x) = \ln\sqrt{x^2+1}$

c) $f(x) = \ln(e^{x^2})$

Lösungen zu den Präsenzaufgaben, 9.Übung

Aufgabe 1: a) Die Funktion f ist insbesondere differenzierbar an der Stelle $x_0 = 2$ mit $f'(2) = 12$.
b) Es gilt: $f'(x) \geq 0$ für alle $x \varepsilon I\!R$, d.h. f ist monoton steigend für alle $x \varepsilon I\!R$ und besitzt somit kein lokales Extremum (Anmerkung: An der Stelle $x_1 = 0$ liegt ein Sattelpunkt vor).

Aufgabe 2: Das Newton-Verfahren liefert:
$x_0 = 0,7, x_1 = 1,82721..., x_2 = 1,41781..., x_3 = 1,27685..., x_4 = 1,26014..., x_5 = 1,25992..., x_6 = 1,25992..., x_7 = 1,25992....$

Aufgabe 3: a) Für $f(x) = \frac{1}{e^x-1}$ gilt:

- $I\!D(f) = I\!R\backslash\{0\}$
- $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0, \lim_{x\to-\infty} f(x) = -1, l-\lim_{x\to 0} f(x) = -\infty, r-\lim_{x\to 0} f(x) = \infty$
- $f(x)$ hat keine Nullstellen
- $f'(x) = -\frac{e^x}{(e^x-1)^2} = 0$: keine lokalen Extrema
- $f'(x) \leq 0$ für alle $x \varepsilon D(f)$, d.h. f ist monoton fallend auf $I\!R$

b) Für $f(x) = (e^x - 2)^2$ gilt:

- $I\!D(f) = I\!R$
- $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty, \lim_{x\to-\infty} f(x) = 4$
- $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = \ln 2$, d.h. $N(\ln 2 \mid 0)$ ist Nullstelle von f
- $f'(x) = 2e^x(e^x - 2) = 0 \Leftrightarrow x = \ln 2$; dies ist eine mögliche lokale Extremstelle von f
- $$f'(x) = \begin{cases} \geq 0 & : \quad x \geq \ln 2;\ \text{f monoton steigend} \\ \leq 0 & : \quad x \leq \ln 2;\ \text{f monoton fallend} \end{cases}$$
  , d.h. f hat ein lokales Minimum bei $T(\ln 2 \mid 0)$

c) Für $f(x) = 3x \cdot e^{-3x^2}$ gilt:

- $I\!D(f) = I\!R$
- $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0, \lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$
- $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$, d.h. $N(0 \mid 0)$ ist Nullstelle von f
- $f'(x) = e^{-3x^2}(3 - 18x^2) = 0 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{\frac{1}{6}}$; dies sind mögliche lokale Extrema von f

- $$f'(x) = \begin{cases} \geq 0 & : \quad x \geq \sqrt{\frac{1}{6}} \vee x \leq -\sqrt{\frac{1}{6}}; \text{ f monoton steigend} \\ \leq 0 & : \quad -\sqrt{\frac{1}{6}} \leq x \leq \sqrt{\frac{1}{6}}; \text{ f monoton fallend} \end{cases}$$

  , d.h. f hat ein lokales Minimum bei $T(-\sqrt{\frac{1}{6}} \mid f(-\sqrt{\frac{1}{6}}))$ und ein lokales Maximum bei $H(\sqrt{\frac{1}{6}} \mid f(\sqrt{\frac{1}{6}}))$

Hinweise zur Klausur:

Termin: Freitag, 7.2.2003, ab 16.00 Uhr. Die reine Arbeitszeit ist 120 Minuten.

Ort: Aula 2, Ahornstraße 55.

Hilfsmittel: Bücher, Skripte, eigene Aufzeichnungen und Taschenrechner sind im üblichen Rahmen zugelassen.

Ausweise: Personalausweis und Studentenausweis sind mitzubringen.

Fachfremde Studierende: Studierende der RWTH, die einen Wechsel ins Fach Biologie beabsichtigen, werden gebeten, sich vor Beginn bei den Aufsichtsführenden zu melden. Sie können die Klausur mitschreiben, über die Anerkennung als Leistungsnachweis entscheidet aber der Prüfungsausschuß Biologie.

Wiederholungsklausur: Eine zweite Klausur findet am Samstag, den 26.April 2003, (erster Samstag in der Vorlesungszeit des Sommersemesters) statt. Genaue Zeit und genauer Ort demnächst im Campus.