Lehrstuhl A für Mathematik
Prof. Dr. S. Walcher
D.Dossing

5. Übung zur Mathematik für Biologen

(Abgabe: Donnerstag, den 28.11.2002, vor der Übung)

Hausaufgaben

Aufgabe 1: In einen Bioreaktor fließen pro Stunde 10 g einer Substanz zu. Die Mikroben im Reaktor bauen pro Stunde 30 Prozent der vorhandenen Substanz ab.
a) Stellen Sie eine Rekursionsformel auf, die die Bestimmung von x_{n+1} aus x_n erlaubt. Der Anfangsbestand der Population sei dabei x_0.
b) Bestimmen Sie den Grenzwert dieser Folge.

Aufgabe 2: Das Caesium-Isotop ^{137}Cs, ein gefährlicher Schadstoff im radioaktiven Abfall, verliert jährlich 2,3% seiner Masse durch radioaktiven Zerfall. Die Masse zum Zeitpunkt $t = 0$ sei x_0.
a) Geben Sie für den Prozeß des radioaktiven Zerfalls eine Rekursionsgleichung an, die die Bestimmung der Masse nach $t = 1, 2, 3, ...$ Jahren erlaubt.
b) Bestimmen Sie die Gesamtmenge des Zerfallsproduktes nach N Jahren.

Aufgabe 3: Bekanntlich ist die *geometrische Reihe* $\sum_{k=0}^{\infty} q^k$ konvergent mit

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q} \text{ für } \mid q \mid \leq 1.$$

Bestimmen Sie mit Hilfe der geometrischen Reihe eine Dezimalbruchentwicklung für folgende Zahlen:

a) $0,222222...$ b) $0,232323...$

Aufgabe 4*: (*Logistisches Wachstum*) Eine Population habe einen Anfangsbestand x_0 und verändere sich gemäß folgender Rekursionsformel:

$$x_{n+1} = 4x_n(1 - x_n).$$

Untersuchen Sie das Verhalten der Folge für $n \to \infty$ und diskutieren Sie Ihr Ergebnis im Hinblick auf das Langzeitverhalten der Population.

Präsenzaufgaben

Aufgabe 1: (Geometrisches oder exponentielles Wachstum) Eine Population habe den Anfangsbestand $x_0 = x$ und verändere sich mit einem konstanten Geburten- und Sterbesatz von $\frac{g}{100}$ bzw. $\frac{s}{100}$ mit $g, s \geq 0$, d.h. pro Zeiteinheit kommen $g\%$ des vorher gegebenen Bestandes hinzu und $s\%$ sterben.
Stellen Sie eine Rekursionsformel auf, die die Bestimmung von x_{n+1} aus x_n erlaubt.

Aufgabe 2: Bestimmen Sie mit Hilfe der geometrischen Reihe eine Dezimalbruchentwicklung für folgende Zahlen:

a) $0,117171...$ b) $0,421421...$