Aufgabe 5 (7*+2* Punkte)

a) Gegeben sei das Anfangswertproblem

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x), \qquad y_0 = y(0), y_1 = y'(0)$$

mit $x \in U_\delta(0) = \{x \in \mathbb{R};\ |x| < \delta\}$, wobei

$$p(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} p_\nu x^\nu, \qquad q(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} q_\nu x^\nu, \qquad f(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} f_\nu x^\nu$$

auf $U_\delta(0)$ definiert sind. Weiter sei eine Folge $(a_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ durch die Rekursion

$$a_0 := y_0, \qquad a_1 := y_1 \tag{1}$$

$$a_{\nu+2} := \frac{1}{(\nu+2)(\nu+1)}\left(f_\nu - \sum_{\mu=0}^{\nu}(\mu+1)p_{\nu-\mu}a_{\mu+1} - \sum_{\mu=0}^{\nu} q_{\nu-\mu}a_\mu\right), \quad \nu \in \mathbb{N}_0, \tag{2}$$

definiert. Zeigen Sie, dass dann gilt:

(i) $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ konvergiert auf $U_\delta(0)$.

(ii) $y(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ ist die eindeutig bestimmte Lösung des Anfangswertproblems auf $U_\delta(0)$.

b) Lösen Sie mit Teil a)

$$y'' + y' + y = \cos x, \qquad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1.$$

Lösung

a) Die Differentialgleichung hat die Form $y'' = F(x,y,y')$ mit $F(x,y,y') := f(x) - p(x)y' - q(x)y$. F ist stetig partiell differenzierbar in y und y', genügt mit Satz (2.8) also einer lokalen Lipschitz-Bedingung. Damit liefert der Satz von Picard-Lindelöf (2.9) die Existenz einer Lösung des Anfangswertproblems auf $[-\varepsilon, \varepsilon]$, die nach dem Satz von Peano (2.14) bis zum Rand von $U_\delta(0)$ fortgesetzt werden kann.

Angenommen, die Lösung y hat eine Potenzreihenentwicklung in $U_\delta(0)$ mit positivem Konvergenzradius, also

$$y(x) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j x^j \text{ auf } U_\delta(0).$$

Dann gilt:

$$y'(x) = \sum_{j=1}^{\infty} j a_j x^{j-1} = \sum_{j=0}^{\infty}(j+1)a_{j+1}x^j \text{ und}$$

$$y''(x) = \sum_{j=1}^{\infty} j(j+1)a_{j+1}x^{j-1} = \sum_{j=0}^{\infty}(j+1)(j+2)a_{j+2}x^j.$$

Einsetzen in die Differentialgleichung

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$$

liefert mit dem Cauchy-Produkt

$$
\begin{aligned}
\sum_{j=0}^{\infty} f_j x^j &= \sum_{j=0}^{\infty}(j+1)(j+2)a_{j+2}x^j + \left(\sum_{j=0}^{\infty} p_j x^j\right)\left(\sum_{j=0}^{\infty}(j+1)a_{j+1}x^j\right) + \left(\sum_{j=0}^{\infty} q_j x^j\right)\left(\sum_{j=0}^{\infty} a_j x^j\right) \\
&= \sum_{j=0}^{\infty}(j+1)(j+2)a_{j+2}x^j + \sum_{j=0}^{\infty} x^j \left(\sum_{k=0}^{j} p_{j-k}q_{k+1}(k+1)\right) + \sum_{j=0}^{\infty} x^j \left(\sum_{k=0}^{j} q_{j-k}a_k\right)
\end{aligned}
$$

Mit dem Identitätssatz für Potenzreihen gilt: Falls die Lösung y in eine Potenzreihe entwickelbar ist, so erfüllen die Koeffizienten notwendigerweise folgende Rekursionsformel (hergeleitet durch Koeffizientenvergleich):

$$
(j+1)(j+2)a_{j+2} + \sum_{k=0}^{j} p_{j-k}a_{k+1}(k+1) + \sum_{k=0}^{j} q_{j-k}a_k = f_j
$$

Zeige nun: Mit diesen a_j ist die Potenzreihe $\sum_{j=0}^{\infty} a_j x^j$ konvergent auf $U_\delta(0)$.

Dazu: Wähle zu $x \in U_\delta(0)$ ein r mit $|x| < r < \delta$. Da $\sum_{j=0}^{\infty}|p_j|r^j$ und $\sum_{j=0}^{\infty}|q_j|r^j$ konvergieren, exisitiert ein $M > 0$, so dass für alle $j \in \mathbb{N}$ gilt:

$$
\sum_{k=0}^{j}|p_k|r^k + r\sum_{k=0}^{j}|q_k|r^k \leq M.
$$

Mit

$$
a_{j+2} = \frac{1}{(j+1)(j+2)}\left(f_j - \sum_{k=0}^{j} p_{j-k}a_{k+1}(k+1) - \sum_{k=0}^{j} q_{j-k}a_k\right)
$$

gilt

$$
\begin{aligned}
|a_{j+2}|r^{j+2} \leq & \frac{r^{j+2}}{(j+1)(j+2)}\left(|f_j| + \sum_{k=0}^{j}|p_{j-k}||a_{k+1}|(k+1) + \sum_{k=0}^{j}|q_{j-k}||a_k|\right) \\
\leq & |f_j|\frac{r^{j+2}}{(j+1)(j+2)} + \sum_{k=0}^{j}|p_{j-k}|r^{j-k}\left(|a_{k+1}|r^{k+1}\right)\frac{r}{(j+1)(j+2)}(j+1) + \\
& \sum_{k=0}^{j}|q_{j-k}|r^{j-k}\left(|a_k|r^k\right)\frac{r^2}{(j+1)(j+2)} \\
\leq & |f_j|r^{j+2} + \frac{r}{j+2}\left(\sum_{k=0}^{j}|p_{j-k}|r^{j-k} + r\sum_{k=0}^{j}|q_{j-k}|r^{j-k}\right)\max_{k\leq j+1}\left\{|a_k|r^k\right\} \\
\leq & |f_j|r^{j+2} + \frac{Mr}{j}\max_{k\leq j+1}\left\{|a_k|r^k\right\}.
\end{aligned}
$$

Da $\sum_{j=0}^{\infty}|f_j|r^{j+2}$ konvergiert, gilt $|f_j|r^{j+2} \to 0$ für $j \to \infty$. Also existiert ein $N \geq 1$, so dass für alle $j \geq N$ gilt:

$$
|a_{j+2}|r^{j+2} \leq 1 + \max_{k\leq j+1}\left\{|a_k|r^k\right\},
$$

da $Mr/j \to 0$ für $j \to \infty$.

Setze nun $A := \max_{k\leq N+1}\left\{|a_k|r^k\right\}$. Damit gilt

$$
|a_{N+2}|r^{N+2} \leq 1 + A,
$$

$$|a_{N+3}|r^{N+3} \le 1 + \max_{k\le N+2}\left\{|a_k|r^k\right\} \le 1+(1+A) = 2+A$$
$$|a_{N+4}|r^{N+4} \le 1 + \max_{k\le N+3}\left\{|a_k|r^k\right\} \le 1+(2+A) = 3+A.$$

Allgemein gilt für alle $j \ge N$:

$$|a_{j+2}|r^{j+2} \le (j-N+1)+A \le j+A.$$

Daraus folgt: Es existiert ein $\tilde{N}$, so dass $|a_j|r^j \le 2j$ für alle $j \ge \tilde{N}$ (nämlich $\tilde{N} = A-2$). Somit folgt für alle $j \ge \tilde{N}$:

$$|a_j||x^j| = |\frac{x^j}{r^j}|r^j|a_j| \le 2j|\frac{x}{r}|^j$$

mit $|x/r| < 1$, da $|x| < r$. Also gilt

$$\sum_{j=0}^{\infty}|a_j||x^j| \le \sum_{j=0}^{\infty} 2j|\frac{x}{r}|^j < \infty,$$

da mit Cauchy-Hadamard und $\limsup\limits_{k\to\infty}\sqrt[k]{2k} = 1 = 1/\rho$ die Reihe konvergiert. Mit dem Majorantenkriterium folgt nun: $\sum_{j=0}^{\infty} a_j x^j = y(x)$ ist absolut konvergent auf $U_\delta(0)$.

Wie bereits gezeigt, ist $y \in C^{(2)}(U_\delta(0))$ und ist Lösung der Differentialgleichung. Weiterhin gilt

$$y(0) = \left(\sum_{j=0}^{\infty} a_j x^j\right)_{x=0} = a_0 = y_0 \text{ und}$$
$$y'(0) = \left(\sum_{j=1}^{\infty} j a_j x^{j-1}\right)_{x=0} = a_1 = y_1,$$

d. h. y erfüllt die Anfangsbedingungen und ist also die eindeutige Lösung des Anfangswertproblems.

b) Mit den Bezeichnungen aus Teil a) gilt hier $p(x) = 1$, $q(x) = 1$, also

$$p_\nu = q_\nu = \begin{cases} 0 & \nu \in \mathbb{N} \\ 1 & \nu = 0, \end{cases} \qquad y_0 := 0, \quad y_1 := 1.$$

Es ist

$$f(x) = \cos x = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!}, \text{ also } f_{2k} = \frac{(-1)^k}{(2k)!}, \quad f_{2k+1} = 0 \text{ für } k \in \mathbb{N}_0.$$

Sei dann $a_0 = 0$ und $a_1 = 1$. Damit gilt:

$$\begin{aligned} a_{2\nu+2} :=& \frac{1}{(2\nu+2)(2\nu+1)}\left(\frac{(-1)^n}{(2\nu)!} - \sum_{\mu=0}^{2\nu}(\mu+1)p_{2\nu-\mu}a_{\mu+1} - \sum_{\mu=0}^{2\nu} q_{2\nu-\mu}a_\mu\right) \\ =& \frac{1}{(2\nu+2)(2\nu+1)}\left(\frac{(-1)^\nu}{(2\nu)!} - (2\nu+1)a_{2\nu+1} - a_{2\nu}\right) \qquad (3) \\ a_{2\nu+1} :=& \frac{1}{(2\nu+1)\cdot 2\nu}\left(0 - \sum_{\mu=0}^{2\nu-1}(\mu+1)p_{2\nu-1-\mu}a_{\mu+1} - \sum_{\mu=0}^{2\nu-1} q_{2\nu-1-\mu}a_\mu\right) \\ =& -\frac{1}{2\nu(2\nu+1)}\left(2\nu a_{2\nu} + a_{2\nu-1}\right). \qquad (4) \end{aligned}$$

Also gilt:

$$a_2 = \frac{1}{2}(1 - a_1 - a_0) = 0, \quad a_3 = -\frac{1}{6}(2a_2 + a_1) = -\frac{1}{6}, \quad a_4 = \frac{1}{12}(-1/2 - 3a_3 - a_2) = 0.$$

Behauptung:

$$a_{2\nu} = 0 \text{ und } a_{2\nu+1} = \frac{(-1)^\nu}{(2\nu+1)!} \text{ für alle } \nu \in \mathbb{N}_0.$$

Beweis mit vollständiger Induktion:

Induktionsanfang: Die Behauptung ist nach obiger Rechnung richtig für $n \in \{0,1,2,3\}$. Zeige nun den Schritt von n nach $n+1$:

1. Fall n ungerade:

$$\begin{aligned} a_{2\nu+2} &\underset{\text{IV}}{\overset{(3)}{=}} \frac{1}{(2\nu+2)(2\nu+1)}\left(\frac{(-1)^\nu}{(2\nu)!} - (2\nu+1)a_{2\nu+1}\right) \\ &\underset{\text{IV}}{=} \frac{1}{(2\nu+2)(2\nu+1)}\left(\frac{(-1)^\nu}{(2\nu)!} - (2\nu+1)\frac{(-1)^\nu}{(2\nu+1)!}\right) \\ &= 0. \end{aligned}$$

2. Fall n gerade:

$$\begin{aligned} a_{2\nu+3} &\overset{(4)}{=} -\frac{1}{(2\nu+2)(2\nu+3)}\left((2\nu+2)a_{2\nu+2} + a_{2\nu+1}\right) \\ &\underset{\text{IV}}{=} -\frac{1}{(2\nu+2)(2\nu+3)}\frac{(-1)^\nu}{(2\nu+1)!} \\ &= \frac{(-1)^{\nu+1}}{(2\nu+3)!}. \end{aligned}$$

Insgesamt:

$$y(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\nu}{(2\nu+1)!} x^{2\nu+1} = \sin x$$

ist Lösung des gegebenen Anfangswertproblems.

Probe: $y'' + y' + y = -\sin x + \cos x + \sin x = \cos x$, $\sin(0) = 0$, $\sin'(0) = 1$.

Bemerkung Der Beweis aus Teil a) liefert die Grundlage für den Potenzreihenansatz. Die Herleitung der Rekursionsformel ist ja schon im Skript gegeben. Völlig unklar war bisher, ob die damit gewonnene Potenzreihe auch wirklich konvergiert. Jetzt ist klar: Die Lösung konvergiert mindestens da, wo auch q, p und f konvergieren.