LEHRSTUHL A FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. E. Görlich,
Dipl.-Math. T. Heck, I. Klöcker

Aachen, den 25. Oktober 2002

2. Übung zur Analysis III

Abgabe: Donnerstag, 31. Oktober 2002, bis 12.00 Uhr im Kasten vor Raum 155, Hauptgebäude

Aufgabe 1 (3+3+3* Punkte) Sei $I \subset \mathbb{R}^2$ ein offener Quader. Gegeben sei die Differentialgleichung der Form

$$g(x,y) + h(x,y)y' = 0, \quad g,h \in C^{(1)}(I). \tag{1}$$

Sie heißt **exakt**, falls $F = \binom{g}{h} : I \to \mathbb{R}^2$ ein Gradientenfeld ist, d.h. es gilt $F = \operatorname{grad} f$ mit $f : I \to \mathbb{R}$.

a) Mit Hilfe von Satz XI (2.10)b) gebe man eine äquivalente Charakterisierung an. Zeigen Sie, dass

$$f : I \to \mathbb{R}, f(x,y) := \int_{x_0}^{x} g(t,y)\,dt + \int_{y_0}^{y} h(x_0,t)\,dt$$

für ein beliebiges, festes $(x_0,y_0) \in I$ die Bedingung $\operatorname{grad} f = F$ erfüllt.

b) Zeigen Sie: Jede Lösung $y(x)$ von (1) erfüllt die Gleichung

$$f(x,y(x)) = c \quad \text{für ein} \quad c \in \mathbb{R}. \tag{2}$$

c) Zeigen Sie mit Hilfe des Satzes über implizite Funktionen, dass umgekehrt auch jede Lösung $y(x)$ von (2) die Differentialgleichung (1) erfüllt.

Aufgabe 2 (2+3 Punkte) Als Anwendung zu Aufgabe 1 bestimme man die Lösungen von

a) $x + 3y^2y' = 0$,

b) $2x + y + (x - 2y)y' = 0$.

Aufgabe 3 (2+2+2 Punkte) Gegeben sei der offene Quader $I \subset \mathbb{R}^2$ und die Differentialgleichung

$$g(x,y) + h(x,y)y' = 0, \quad g,h \in C^{(1)}(I).$$

Eine Funktion M mit $M(x,y) \neq 0$ auf I heißt **integrierender Faktor** (oder Eulerscher Multiplikator), falls die Differentialgleichung

$$M(x,y)g(x,y) + M(x,y)h(x,y)y' = 0$$

exakt ist.

a) Zeigen Sie: $M \in C^{(1)}(I)$ ist genau dann ein integrierender Faktor, wenn

$$hM_x - gM_y = M(g_y - h_x) \quad \text{gilt.}$$

b) Zeigen Sie: Ist $h(x,y) \neq 0$ auf I und hängt $\frac{g_y - h_x}{h}$ nicht von y ab, so ist

$$M(x,y) = M(x) = \exp\left(\int_c^x \frac{g_y - h_x}{h}(t)\,dt\right), \quad c \in \mathbb{R},$$

ein integrierender Faktor.

c) Formulieren und beweisen Sie ein zu b) analoges Ergebnis für den Fall, dass $\frac{h_x - g_y}{g}$ nicht von x abhängt.

Aufgabe 4 (3+3 Punkte) Als Anwendung zu Aufgabe 3 löse man die Differentialgleichungen

a) $y(1 + xy) = xy'$,

b) $x^2 + y - xy' = 0$.