Lehrstuhl A für Mathematik
Prof. Dr. R. L. Stens, Tel.: 80-94532
Dipl.-Math. A. Haß, Tel.: 80-94526

Aachen, den 31.01.2002

# 13. Übung zu Zahlbereichserweiterungen

(Abgabe: Donnerstag, 07.02.2002, vor der Übung oder
bis 10 Uhr im Übungskasten vor dem Sekretariat des Lehrstuhls)

**Aufgabe 1:** Betrachten Sie den $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{C}$ mit der Multiplikation $(z, w) \mapsto \overline{z} \cdot \overline{w}$. Zeigen Sie, dass $\mathbb{C}$ damit zu einer $\mathbb{R}$-Algebra wird. Untersuchen Sie zudem, ob diese Algebra assoziativ, kommutativ sowie nullteilerfrei ist und ein Einselement besitzt. $\boxed{4}$

**Aufgabe 2:** Beweisen Sie ohne Benutzung des Fundamentalsatzes der Algebra die folgenden Aussagen:

a) Sei $a \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$. Dann existieren genau zwei verschiedene $z \in \mathbb{C}$ mit $z^2 = a$. $\boxed{3}$

b) Seien $a, b, c \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$. Es gibt genau dann zwei verschiedene $z \in \mathbb{C}$ mit $az^2 + bz + c = 0$, wenn $b^2 - 4ac \neq 0$ gilt. Im Fall $b^2 - 4ac = 0$ gibt es genau ein solches $z \in \mathbb{C}$. $\boxed{2}$

**Aufgabe 3:** Beweisen Sie folgende Eigenschaften der Funktionen $\sin, \cos : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$:

a) Für alle $N \in \mathbb{N}$ und $t \in \mathbb{R}$ sei

$$\cos t = \sum_{k=0}^{N-1} (-1)^k \frac{t^{2k}}{(2k)!} + r_{2N}(t), \quad \sin t = \sum_{k=0}^{N-1} (-1)^k \frac{t^{2k+1}}{(2k+1)!} + r_{2N+1}(t).$$

Dabei gilt $|r_n(t)| \leq \frac{|t|^n}{n!}$ für alle $|t| \leq n+1, n \in \mathbb{N}$. $\boxed{3}$

b) $\cos 2 \leq -\frac{1}{3}$. $\boxed{1}$

c) $\sin t > 0$ für alle $t \in ]0; 2]$. $\boxed{1}$

d) $\cos|_{[0;2]}$ ist streng monoton fallend. $\boxed{2}$

e) $\cos t$ hat genau eine Nullstelle im Intervall $[0; 2]$. $\boxed{1}$

**Aufgabe 4:** Zeigen Sie, dass für eine Abbildung $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ die folgenden Aussagen äquivalent sind:

(i) $f(z) = f(0) + cz$ oder $f(z) = f(0) + c\overline{z}$ mit $c \in S^1 := \{w \in \mathbb{C}; |w| = 1\}$.

(ii) $f$ ist *abstandstreu*, d. h. $|f(w) - f(z)| = |w - z|$ für $w, z \in \mathbb{C}$. $\boxed{4}$

**Aufgabe 5:** Beweisen Sie, dass jeder Kreis in $\mathbb{C}$ durch eine Gleichung der Form

$$(*) \qquad Az\overline{z} + Bz + \overline{Bz} + C = 0 \text{ mit } A, C \in \mathbb{R},\ A \neq 0 \text{ und } B \in \mathbb{C}$$

beschrieben werden kann. Genauer gilt dann $|B|^2 > AC$, und Mittelpunkt $m$ bzw. Radius $r > 0$ sind durch

$$m = -\frac{\overline{B}}{A} \text{ bzw. } r^2 = \frac{|B|^2 - AC}{A^2}$$

gegeben. Umgekehrt beschreibt $(*)$ im Fall $A \neq 0$ und $|B|^2 > AC$ stets einen Kreis. Im Fall $A = 0$ aber $B \neq 0$ erhält man durch $(*)$ genau alle Geraden in $\mathbb{C}$. $\boxed{4}$

**Aufgabe 6:** Die Gruppe $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ der invertierbaren $2 \times 2$–Matrizen über $\mathbb{C}$ operiert auf $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ durch die sogenannten *Möbiustransformationen*

$$z \mapsto M\langle z\rangle := \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta},\ M = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C}), z \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}.$$

Hierbei sei $M\langle\infty\rangle := \frac{\alpha}{\gamma}$, falls $\gamma \neq 0$ und $M\langle\infty\rangle := \infty$, falls $\gamma = 0$. Zeigen Sie für $M, N \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C}), M = \left(\begin{smallmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{smallmatrix}\right)$ und $w, z \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$:

a) $(MN)\langle z\rangle = M\langle N\langle z\rangle\rangle$. $\boxed{2}$

b) Aus $M\langle z\rangle = M\langle w\rangle$ folgt $z = w$. $\boxed{2}$

c) $M\langle z\rangle = N\langle z\rangle\ \forall z \in \mathbb{C} \ \Leftrightarrow\ \exists\, 0 \neq \lambda \in \mathbb{C}$ mit $M = \lambda N$. $\boxed{2}$

d) $M\langle z\rangle - M\langle w\rangle = \frac{\det M}{(\gamma z+\delta)(\gamma w+\delta)}(z - w)$. $\boxed{3}$

$\boxed{\boxed{34}}$