Lehrstuhl A für Mathematik

Prof. Dr. R. L. Stens, Tel.: 80-94532

Dipl.-Math. A. Ha"s, Tel.: 80-94526

Aachen, den 24.01.2002

12. Übung zu Zahlbereichserweiterungen

(Abgabe: Donnerstag, 31.01.2002, vor der Übung oder
bis 10 Uhr im Übungskasten vor dem Sekretariat des Lehrstuhls)

Aufgabe 1: Beweisen Sie folgende Aussagen für die in der 11ten Übung eingeführten pythagoräischen Zahlentripel:

a) Man erhält jedes pythagoräische Tripel genau einmal in der Form (ta, tb, tc), wobei $t \in \mathbb{N}$ und (a, b, c) ein primitives pythagoräisches Tripel ist. $\boxed{1}$

b) Für jedes primitive pythagoräische Tripel (a, b, c) gilt:

  (i) $\operatorname{ggT}(a, b) = \operatorname{ggT}(a, c) = \operatorname{ggT}(b, c) = 1$, $\boxed{1}$

  (ii) a, b sind nicht beide gerade und nicht beide ungerade. $\boxed{2}$

Aufgabe 2: Man erhält die primitiven pythagoräischen Tripel (a, b, c) mit geradem a genau einmal in der Form

$$(a, b, c) = (2uv, u^2 - v^2, u^2 + v^2),$$

wobei $(u, v) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ teilerfremd, nicht beide ungerade mit $u > v$ sind.

Hinweis: Betrachten Sie $\mathbb{E} := \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R};\quad x^2 + y^2 = 1\}$, den Einheitskreis der Ebene. Benutzen Sie, dass die stereographische Projektion $\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{E} \setminus \{(0, 1)\}, t \mapsto (\frac{2t}{t^2+1}, \frac{t^2-1}{t^2+1})$ bijektiv mit Umkehrabbildung $\Phi^{-1} : \mathbb{E} \setminus \{(0, 1)\} \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto \frac{x}{1-y}$ ist und $\Phi(\mathbb{Q}) = [\mathbb{E} \cap (\mathbb{Q} \times \mathbb{Q})] \setminus \{(0, 1)\}$ gilt. $\boxed{6}$

Aufgabe 3: Beweisen Sie für alle $a, b \in \mathbb{R}^+$ und $m, n \in \mathbb{N}$ folgende Aussagen:

a) $\sqrt[nm]{a} = \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}$, b) $\sqrt[n]{a^m} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m$. $\boxed{2}$

Hinweis: Sie dürfen zur Lösung der folgenden Aufgaben die Reihenentwicklung $\exp x := e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n$ sowie die Stetigkeit von exp und des natürlichen Logarithmus $\ln := \log_e$ als bekannt voraussetzen. Dabei ist $e := \exp 1$ die Eulersche Zahl.

Aufgabe 4: Leiten Sie für die Exponentialfunktion zur Basis $a \in \mathbb{R}^+$, $a \neq 1$, die Reihenentwicklung

$$\exp_a x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\ln a)^n}{n!} x^n \qquad (x, y \in \mathbb{R})$$

her, und beweisen Sie damit die Funktionalgleichung

$$\exp_a(x + y) = (\exp_a x)(\exp_a y) \qquad (x, y \in \mathbb{R}).$$

$\boxed{4}$

Aufgabe 5: Sei $a \in \mathbb{R}$, $a > 1$. Zeigen Sie, dass dann $\log_a$ langsamer wächst als jede Potenz von x, d. h. für jedes $k \in \mathbb{N}$ gilt $\lim_{x\to\infty} \frac{\log_a x}{x^k} = 0$. $\boxed{4}$

Aufgabe 6: Zeigen Sie $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$ für $a > 0$. $\boxed{3}$

Aufgabe 7: Bestimmen Sie die Ableitungen der Funktionen $\exp_a$ und $\log_a$. $\boxed{4}$

Aufgabe 8: Zeigen Sie, dass für $a \in \mathbb{R}^+$, $a \neq 1$, die Menge $\{\log_a p;\ p \in \mathbb{P}\}$ linear unabhängig über $\mathbb{Q}$ ist. $\boxed{3}$

$\boxed{\boxed{30}}$

Johann Carl Friedrich Gauss

Gauss 1803 im Alter von 26 Jahren

(Teil 2) Gauss married Johanna Ostoff on 9 October, 1805. In 1807 he left Brunswick to take up the position of director of the Göttingen observatory. In 1808 his father died, and a year later Gauss's wife Johanna died after giving birth to their second son, who was to die soon after her. Gauss was married for a second time the next year, to Minna the best friend of Johanna, and although they had three children, this marriage seemed to be one of convenience for Gauss.

Gauss's work never seemed to suffer from his personal tragedy. He published his second book, *Theoria motus corporum coelestium in sectionibus conicis Solem ambientium,* in 1809, a major two volume treatise on the motion of celestial bodies. Much of his time was spent on a new observatory, completed in 1816, but he still found the time to work on other subjects.

Gauss had been asked in 1818 to carry out a geodesic survey of the state of Hanover to link up with the existing Danish grid. Gauss was pleased to accept and took personal charge of the survey, making measurements during the day and reducing them at night, using his extraordinary mental capacity for calculations.

In 1822 Gauss won the Copenhagen University Prize with *Theoria attractionis . . .* together with the idea of mapping one surface onto another so that the two *are similar in their smallest parts.* This paper was published in 1825 and led to the much later publication of *Untersuchungen über Gegenstände der Höheren Geodäsie* (1843 and 1846). The paper *Theoria combinationis observationum erroribus minimis obnoxiae* (1823), with its supplement (1828), was devoted to mathematical statistics, in particular to the least squares method.

From the early 1800's Gauss had an interest in the question of the possible existence of a non-Euclidean geometry.