LEHRSTUHL A FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. A. Krieg, A. Marschner

Aachen, den 16. November 2001

6. Übung zur Höheren Funktionentheorie

Abgabe: Freitag, 16.11.2001, bis 12.00 Uhr

Aufgabe 1 (**singulärer Punkt, natürliche Grenze**)(6 Punkte):
Definition: Es seien $D \subset \widehat{\mathbb{C}}$ eine offene Kreisscheibe, (f, D) ein Funktionselement und $a \in \partial D$. Wenn es eine direkte analytische Fortsetzung (f_2, D_2) von (f, D) mit $a \in D_2$ gibt, dann sagt man: (f, D) lässt sich über a hinaus fortsetzen. Anderenfalls heisst a *singulärer Punkt* für (f, D). Ist jeder Randpunkt von D ein singulärer Punkt, so heisst ∂D die *natürliche Grenze* für (f, D).
Man suche sich 2 der folgenden Beispiele aus und beweise sie:

a) Für $f : \mathbb{E} \to \mathbb{C},\ f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$ ist $a = 1$ der einzige singuläre Punkte von $(f, \mathbb{E})$.

b) Für $f : \mathbb{E} \to \mathbb{C},\ f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^{n!}$ ist $\partial\mathbb{E}$ die natürliche Grenze von $(f, \mathbb{E})$.

c) Für $f : \mathbb{E} \to \mathbb{C},\ f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^{2^n}$ ist $\partial\mathbb{E}$ die natürliche Grenze von $(f, \mathbb{E})$.

Hinweis: b) und c) geht über einen Widerspruchsbeweis. Wähle geeigneten Punkt und zeige, dass $\lim_{n\to\infty} |f(z_n)| = \infty$ für eine geeignete Folge $z_n \in \mathbb{E}$ (geeignete Abschätzungen).

Aufgabe 2 (**Potenzreihen und singuläre Punkte**) (7 Punkte)
Es sei $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius 1 und $a_n \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$. Zeigen Sie, dass 1 ein singulärer Punkt für $(f, \mathbb{E})$ ist.
Hinweis: Widerspruchsbeweis. Dabei entsteht ein Widerspruch zum Konvergenzradius (geeignete Abschätzungen).

Aufgabe 3 (**ungleiche Fortsetzungen**)(7 Punkte):
Gegeben sei die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2^n}}{1-z^{2\cdot 2^n}}$. Zeigen Sie:

a) Die Reihe konvergiert in $G_1 = \mathbb{E}$ und in $G_2 = \mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{E}}$ und die durch die Reihe definierten Funktionen $f_k : G_k \to \mathbb{C}$ $(k = 1, 2)$ sind holomorph.

b)
$$f_1(z) = \frac{z}{1-z}\ (z \in G_1) \quad \text{und} \quad f_2(z) = \frac{1}{1-z}\ (z \in G_2).$$

Bemerkung: f_1, f_2 lassen sich beide auf $\mathbb{C} \setminus \{1\}$ fortsetzen, aber $f_1 \neq f_2$. Desweiteren stimmen diese Fortsetzungen nicht überall (wo Reihe bzw. f_i definiert sind) mit der Reihe überein.

Aufgabe 4* (**analytische Fortsetzbarkeit**)
Sei $f : \mathbb{E} \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion, die sich längs jedes Strahls $S_\alpha := \{z \in \mathbb{C};\ \arg z = \alpha\}$ beliebig weit analytisch fortsetzen lässt. Man zeige, dass es eine ganze Funktion F gibt mit $F = f|_{\mathbb{E}}$.