LEHRSTUHL A FÜR MATHEMATIK — Aachen, den 26. Oktober 2001

Prof. Dr. A. Krieg, A. Marschner

3. Übung zur Höheren Funktionentheorie

Abgabe: Freitag, 02.11.2001, bis 12.00 Uhr

Aufgabe 1 (**Identitätssatz und konzentrische Kreise**)(9 Punkte):

a) (Identitätssatz für meromorphe Funktionen)
Es sei $G \subset \widehat{\mathbb{C}}$ ein Gebiet und $f, g : G \to \widehat{\mathbb{C}}$ meromorphe Funktionen. Ist die Menge $\{z \in G; f(z) = g(z)\}$ nicht diskret in G, dann ist $f = g$.

b) (Konzentrische Kreise)
Es sei T eine MÖBIUS-transformation, die zwei konzentrische Kreise mit den Radien r_1, R_1 auf zwei konzentrische Kreise mit den Radien r_2, R_2 abbildet. Zeigen Sie: $R_1/r_1 = R_2/r_2$ oder $R_1/r_1 = r_2/R_2$.

Aufgabe 2 (**Möbiustransformationen III**)(11 Punkte):
Definition: Es sei K ein Kreis/Gerade in $\widehat{\mathbb{C}}$ und $z, z^* \in \widehat{\mathbb{C}}$. Sei T eine MÖBIUS-transformation, die K auf $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ abbildet. z^* heißt *Spiegelpunkt* bzgl. K, wenn $T(z^*) = \overline{T(z)}$ ist. Dann ist auch z Spiegelpunkt von z^* bzgl. K. Man sagt auch: z und z^* liegen symmetrisch bezgl. K.

a) Man mache sich klar, dass die Definition nicht von der Wahl von T abhängt.

b) Sind z und z^* Spiegelpunkte bzgl. einer Geraden K, so sind sie auch Spiegelpunkte unter der geometrischen (üblichen) Spiegelung an der Geraden K. Sind sie Spiegelpunkte bzgl. des Kreises $K = \{z; |z - z_0| = R\}$, so gilt

$$z^* = z_0 + \frac{R^2}{\overline{z} - \overline{z_0}}.$$

Veranschaulichen Sie sich diese Spiegelung mithilfe einer Skizze.

c) Sei K eine Kreis/Gerade in $\widehat{\mathbb{C}}$, und z, z^* seien Spiegelpunkte bzgl. K. Ist T eine MÖBIUS-transformation, so sind $T(z)$ und $T(z^*)$ symmetrisch bzgl. $T(K)$.

d*) Man bestimme alle parabolischen Automorphismen T des Einheitskreises mit Fixpunkt 1 und zeige, dass für diese Automorphismen gilt: $T^n(z_0) \in \partial K_{1/2}(1/2)$.

e) Man bestimme alle Geraden/Kreise in $\widehat{\mathbb{C}}$, so dass 1 und -1 symmetrisch liegen.

Aufgabe 3* (**Möbiustransformationen IV**):
Definition:

(i) Es sei $\mathcal{M}$ die Gruppe der MÖBIUS-transformationen und $f, g \in \mathcal{M}$. g heisst *konjugiert* zu f (in Zeichen $g \sim f$), wenn es ein $h \in \mathcal{M}$ gibt mit $g = h^{-1} \circ f \circ h$. Desweiteren sei für $f \in \mathcal{M}$ und $n \in \mathbb{N}$ f^n definiert als die n-fache Hintereinanderausführung von f und $f^0 :=$ id.

(ii) Sei $\Phi_M \in \mathcal{M}$ für $M \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$. Dann sei

$$\mathrm{tr}^2(g) := \frac{(\mathrm{Spur}\, M)^2}{\det M}.$$

a) $\sim$ ist eine Äquivalenzrelation und $\mathrm{tr}^2(g)$ hängt nicht von der Wahl von M ab. Was passiert mit Fixpunkten unter Konjugation?

b) (Satz und Definition)
Es sei $g \in \mathcal{M}$, $g \neq \mathrm{id}$.
1. Fall: g hat genau einen Fixpunkt α. Dann ist g konjugiert zu einer Translation. Es gilt dann für alle $z \in \widehat{\mathbb{C}}$

$$\lim_{n\to\infty} g^n(z) = \alpha.$$

g heisst dann *parabolisch*.
2. Fall: g hat genau 2 Fixpunkte α, β. Dann ist g konjugiert zu einer Drehstreckung $z \mapsto \lambda z$, $\lambda \in \mathbb{C}$, $\lambda \neq 0, 1$.
g heisst

$$\begin{cases} \textit{elliptisch}, & \text{wenn} \quad |\lambda| = 1 \\ \textit{hyperbolisch}, & \text{wenn} \quad \lambda > 0 \\ \textit{loxodromisch} & \text{sonst} \end{cases}$$

Die Typeneinteilung ist unabhängig von der gewählten Konjugation.
Ist g nicht elliptisch, so gilt entweder

$$\lim_{n\to\infty} g^n(z) = \alpha \quad \text{für alle} \quad z \in \widehat{\mathbb{C}} \setminus \{\beta\}$$

oder

$$\lim_{n\to\infty} g^n(z) = \beta \quad \text{für alle} \quad z \in \widehat{\mathbb{C}} \setminus \{\alpha\}$$

c) Seien $f, g \in \mathcal{M} \setminus \{\mathrm{id}\}$. Dann gilt:

$$f \sim g \quad \Longleftrightarrow \quad \mathrm{tr}^2(f) = \mathrm{tr}^2(g).$$

d) Sei $g \in \mathcal{M} \setminus \{\mathrm{id}\}$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} 0 \leq \mathrm{tr}^2(g) < 4 &\Longleftrightarrow g \text{ elliptisch} \\ \mathrm{tr}^2(g) = 4 &\Longleftrightarrow g \text{ parabolisch} \\ \mathrm{tr}^2(g) > 4 &\Longleftrightarrow g \text{ hyperbolisch} \\ \mathrm{tr}^2(g) \notin [0;\infty) &\Longleftrightarrow g \text{ loxodromisch} \end{aligned}$$