LEHRSTUHL A FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. A. Krieg, A. Marschner

Aachen, den 31. Januar 2002

15. Übung zur Höheren Funktionentheorie

Abgabe: Dienstag, 12.02.2002, bis 9.00 Uhr

Hinweis: Die Abgabe für Aufgabe 1 und Aufgabe 2 kann nicht verlängert werden (auch nicht um ein paar Stunden!). Aufgabe 3 und Aufgabe 4 können (wie die Ferienübung) bis zum ... abgegeben werden.

Aufgabe 1 (**Reihen über Primzahlen**)(5+5+5 Punkte):

a) Die Reihe $\sum_{p \text{ prim}} \frac{1}{p}$ ist divergent; insbesondere existieren unendlich viele Primzahlen.

b) Die Reihe $\sum_{p \text{ prim}} \frac{1}{p \log p}$ ist konvergent.

c) Verschärfen Sie die Aussage von a) zu

$$\sum_{p \leq x p \text{ prim}} \frac{1}{p} \sim \log\log x \quad \text{für} \quad x \to \infty.$$

Hinweis:

b) Schätzen Sie $\sharp\{p \text{ prim}; 2^{n-1} < p < 2^n\}$ mit Hilfe des Primzahlsatzes ab.

c) Verwenden Sie $\vartheta(x) \sim x$ sowie die Abelsche Summation (1.1).

Bemerkung: Man beachte, dass die harmonische Reihe und $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log n}$ (letzteres nach Integralvergleichskriterium) divergent sind.

Aufgabe 2 (**Hurwitzsche Zetafunktion**)(5+?* Punkte):

a) Für $0 < a \leq 1$ wird durch $\zeta(s,a) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+a)^{-s}$ eine für $\mathrm{Re}(s) > 1$ holomorphe Funktion definiert. Man bezeichnet sie als Hurwitsche Zetafunktion.

b) Für $\mathrm{Re}(s) > 1$ gilt

$$\zeta(s,a) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{\infty} \frac{-x}{e^{-x}-1} e^{-ax} x^{s-2} dx.$$

c*) $\zeta(s,a)$ hat eine meromorphe Fortsetzung nach ganz $\mathbb{C}$ und diese ist holomorph bis auf einen einfachen Pol bei $s = 1$ mit Residuum 1.

d*) Man zeige:

$$\zeta(-n,a) = \frac{-1}{n+1} B_{n+1}(a),$$

wobei die Bernoullische Polynome definiert sind als $B_n(x) := \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_{n-k} x^k$.

Hinweis: Bei c) zeige man z. B. zunächst

$$\int_0^1 f(x) x^{s-2} dx - \frac{1}{s-1} = \sum_{n=1}^{N-1} \frac{b_n}{n+s-1} + \int_0^1 \left(f(t) - \sum_{n=0}^{N-1} b_n t^n \right) t^{s-2} dt$$

für geeignete b_n's (berechne!) und $f(t) = \frac{-t}{e^{-t}-1}e^{-at}$ und zeige für das Integral der rechten Seite die Fortsetzung nach $\mathrm{Re}(z) > \alpha(N)$.

Aufgabe 3* (**anderer Beweis für meromorphe Fortsetzung von** ζ)(8* Punkte):
Zeigen Sie für $s \in \mathbb{C}$ mit $\mathrm{Re}(s) > 1$

$$\zeta(s) - \frac{s}{s-1} = \frac{1}{1-s}\left(\sum_{n=2}^{\infty}\binom{s+n-2}{n}(\zeta(s+n-1)-1)\right),$$

und folgern Sie hiermit, dass sich $\zeta(s) - \frac{s}{s-1}$ zu einer auf ganz $\mathbb{C}$ holomorphen Funktion fortsezen lässt.