LEHRSTUHL A FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. A. Krieg, A. Marschner

Aachen, den 14. Dezember 2001

11. Übung zur Höheren Funktionentheorie

Abgabe: Montag, 014.01.2001, bis 11.00 Uhr

Definition: Ein Produkt $\prod_{n=1}^{\infty} f_n$ heißt *normal konvergent*, wenn $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n - 1|$ lokal gleichmäßig konvergiert.

Aufgabe 1 (**Beispiele für Produkte**)(5+3+2 Punkte):

a) Sei U offen und $(f_n)_n$ eine Folge von in U holomorphen Funktionen. Man zeige:
Ist $\prod_{n=1}^{\infty} f_n$ normal konvergent, so existiert für jede kompakte Teilmenge $K \subset D$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass die Folge $\left(\prod_{n=n_0}^{m} f_n\right)_{m \geq n_0}$ auf K (bei Folgen im üblichen Sinne) gleichmäßig gegen eine nullstellenfreie Grenzfunktion konvergiert.

b) Untersuchen Sie das Produkt $\prod_{n=1}^{\infty}(1+z^{2^n})$ auf Konvergenz und bestimmen Sie einen geschlossenen Ausdruck für die Grenzfunktion.

c) Geben Sie ein kanonisches Produkt an, das genau an den Stellen $z = n$ n-fache Nullstellen für alle $n \in \mathbb{N}$ hat.

Hinweis: In a) zeige zunächst

$$|\log(1+w)| \leq 2|w| \quad \text{für} \quad |w| < \frac{1}{2}.$$

In b) 2. Teil betrachte $g(z) = (1-z^2)f(z)$ auf dem Konvergenzgebiet.

Aufgabe 2 (**Folgerungen aus dem Produktsatz**)(5+(3+5)* Punkte)

a) Für $k \in \mathbb{N}$ seien $a_k, b_k \in \mathbb{C}$ mit $a_k \neq a_j$ für $k \neq j$ und $\lim_{k\to\infty} |a_k| = \infty$ gegeben. Zeigen Sie, dass eine ganze Funktion f mit $f(a_k) = b_k$ für $k \in \mathbb{N}$ existiert.

b*) Zeigen Sie, dass in a) die Funktion f so gewählt werden kann, dass die einzigen Nullstellen von f die Werte a_k sind, für die $b_k = 0$ ist.

c*) Verallgemeinern Sie a) wie folgt:
Für $k \in \mathbb{N}$ seien $a_k \in \mathbb{C}$ und $n_k \in \mathbb{N}_0$ mit $a_k \neq a_j$ und $\lim_{k\to\infty} |a_k| = \infty$ gegeben. Außerdem seien zu $k \in \mathbb{N}$ und $l \in \mathbb{N}_0$ mit $0 \leq l \leq n_k$ noch Werte $b_k^{(l)} \in \mathbb{C}$ gegeben. Zeigen Sie, dass eine ganze Funktion f mit $f^{(l)}(a_k) = b_k^{(l)}$ für alle $k \in \mathbb{N}$ und $0 \leq l \leq n_k$ existiert.

Hinweis: In a) konstruiere zuerst 2 Funktionen mit einfachen Nullstellen in den a_k bzw. mit einfachen Polen und geeignetem Residuum und betrachte das Produkt.
In c) verfeinere man die Konstruktion aus a), in dem man mehrfache Null- bzw. Polstellen betrachtet.

Aufgabe 3* (**Additionstheorem**)(5* Punkte):
Es seien f und g ganze Funktionen ohne gemeinsame Nullstellen. Zeigen Sie, dass ganze Funktionen ϕ_1 und ϕ_2 existieren, für die $\phi_1(z)f(z) + \phi_2(z)g(z) \equiv 1$ gilt.

Hinweis: Konstruiere mit z.B. Aufgabe 2c) eine Funktion ϕ, so dass g und $1 - \phi \cdot f$ die gleichen Nullstellen mit VFH haben.

Aufgabe 4* (**Darstellungen**)(10* Punkte):

a) Es sei f meromorph in $\mathbb{C}$. Zeigen Sie, dass eine in $\mathbb{C}$ meromorphe Funktion g mit $f = \frac{g'}{g}$ genau dann existiert, wenn alle Pole von f einfach sind und ganzzahlige Residuen haben.

b) Es sei f meromorph in $\mathbb{C}$ und $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass eine in $\mathbb{C}$ meromorphe Funktion g mit $f = g^n$ genau dann existiert, wenn alle Pole und alle Nullstellen von f eine Vielfachheit haben, die durch n teilbar ist.

Hinweis: Konstruiere zuerst eine meromorphe Funktion, die "ähnliche" Nullstellen und Polstellen wie f hat, indem man wie in Aufgabe 2 getrennte Funktionen zu den Polstellen und Nullstellen und den zugehörigen Quotienten P_1/P_2 betrachtet. Daraus konstruiert man sich eine geeignete Funktion. Beachte dabei wie ganze Funktionen ohne Nullstellen aussehen.