LEHRSTUHL A FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. A. Krieg, A. Marschner

Aachen, den 18. Oktober 2001

1. Übung zur Höheren Funktionentheorie

Abgabe: Montag, 22.10.2001, 12.00 Uhr

Informationen zum Übungsbetrieb: Jeweils donnerstags nach der Vorlesung wird ein Übungsblatt ausgegeben. Die bearbeiteten Lösungen sind bis auf die erste Übung zum folgenden Freitag, 13.00 Uhr, im Kasten vor dem Sekretariat des Lehrstuhls, Raum 153, Hauptgebäude (HG) abzugeben. Die Übungen können in Zweiergruppen bearbeitet werden. Die korrigierten Lösungen werden dann in der Übung am Donnerstag zurückgegeben. Dort wird eine Lösung der Aufgaben vorgestellt. Die Übungsblätter zur Funktionentheoris I sind auch im WWW erhältlich (`http://www.mathA.rwth-aachen.de/lehre/WS01/Funktionentheorie`).
Außerdem stehen für alle Fragen und Probleme rund um die Vorlesung Prof. Dr. A. Krieg (nach der Vorlesung sowie nach Vereinbarung, auch per Email möglich, Raum 153, HG) und der Assistent A. Marschner (nach der Übung sowie nach Vereinbarung, Raum 155, HG) zur Verfügung. Sie können die Mitarbeiter auch per E-Mail erreichen: krieg@mathA.rwth-aachen.de, axel.marschner@mathA.rwth-aachen.de.
Die Übung wird dabei im Gegensatz zum Grundstudium eine Mischung aus Diskussionstunde und Übung sein. Den Schein über die Teilnahme an den Übungen erhält, wer mindestens einmal eine der Sternaufgaben vorrechnet und mindestens 50 Prozent der Übungspunkte erreicht.

Aufgabe 1 (**stereographische Projektion und Chordalmetrik**)(10 Punkte):
Sei σ die stereographische Projektion (vgl. Ana IV, Skript Seite 497).
Definition:

1) Eine Menge $G \subset \widehat{\mathbb{C}}$ heisst *Gerade* in $\widehat{\mathbb{C}}$, wenn $\infty \in G$ und $G \backslash \{\infty\}$ eine Gerade in $\mathbb{C}$ ist.
2) Die Abbildung $\chi : \widehat{\mathbb{C}} \times \widehat{\mathbb{C}} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$\chi(z_1, z_2) = \|\sigma^{-1}(z_1) - \sigma^{-1}(z_2)\|$$

heisst *Chordalmetrik*. Dabei ist $\|\cdot\|$ die Euklidische Norm im $\mathbb{R}^3$.

Man zeige:

a) K ist genau dann ein Kreis auf $S^2 \subset \mathbb{R}^3$, wenn $\sigma(K)$ ein Kreis oder eine Gerade in $\widehat{\mathbb{C}}$ ist.
b)

$$\begin{aligned} \chi(z_1, z_2) &= \frac{|z_1 - z_2|}{\sqrt{1+|z_1|^2}\sqrt{1+|z_2|^2}} && \text{für alle} \quad z_1, z_2 \in \mathbb{C}, \\ \chi(z_1, \infty) &= \frac{1}{\sqrt{1+|z_1|^2}} && \text{für alle} \quad z_1 \in \mathbb{C}. \end{aligned}$$

c) χ ist eine Metrik auf $\widehat{\mathbb{C}}$.
d) Die Topologie $(\widehat{\mathbb{C}}, \chi)$ stimmt mit der in Ana IV Kapitel XX (3.6) definierten Topologie überein. Insbesondere ist also $(\widehat{\mathbb{C}}, \chi)$ nach XX (3.7) ein kompakter metrischer Raum.

e)

$$\chi(z_1,z_2)=\chi(\frac{1}{z_1},\frac{1}{z_2})\quad \text{für alle}\quad z_1,z_2\in\widehat{\mathbb{C}}.$$

Aufgabe 2* (**Pole der** RIEMANN**schen Zetafunktion**):
Sei $\zeta(s)$ die RIEMANNsche Zetafunktion und $\Psi(s)=(1-2^{1-s})\zeta(s)$ für $\mathrm{Re}(s)>1$. Man zeige:

a)

$$\zeta(s)=\frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^\infty\frac{t^{s-1}}{e^t-1}\mathrm{dt}\quad \text{für}\quad \mathrm{Re}(s)>1.$$

b)

$$\Psi(s)=\frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^\infty\frac{t^{s-1}}{e^t+1}\mathrm{dt}\quad \text{für}\quad \mathrm{Re}(s)>1.$$

c) Die Integraldarstellung aus b) stellt eine holomorphe Funktion dar für $\mathrm{Re}(s)>0$.

d) $\zeta(s)$ lässt sich in die Halbebene $\mathrm{Re}(s)>0$ meromorph fortsetzen und hat höchstens Pole in $s=1$ oder $s=1\pm\frac{2k\pi i}{\log 2}$ für $k\in\mathbb{Z}$.

e) Führe die Aufgabenteile b)-d) für $(1-3^{1-s})\zeta(s)$ durch.

f) $\zeta(s)$ hat genau einen Pol in $\{s;\mathrm{Re}(s)>0\}$ und zwar bei $s=1$.
Hinweis: $\frac{\log 3}{\log 2}$ ist irrational.

Bemerkung: Die Reihendarstellung von $\Psi(s)$ konvergiert genau für $\mathrm{Re}(s)>0$, was aber nicht ganz so einfach zu zeigen ist. Sie konvergiert genau für $\mathrm{Re}(s)>1$ absolut.
$\zeta(s)$ lässt sich mit Hilfe einer Funktionalgleichung auf ganz $\mathbb{C}$ meromorph fortsetzen. Sie hat bei $s=1$ ihren einzigen Pol, der einfach ist. Das Residuum ist 1. Die (noch unbewiesene) RIEMANNsche Vermutung besagt, dass alle nichttrivialen Nullstellen (also nicht die einfachen Nullstellen in $z\in-2\mathbb{N}$) auf der Geraden $\mathrm{Re}(s)=1/2$ liegen. Bekannt ist (siehe Analytische Zahlentheorie oder diese Vorlesung), dass alle sonstigen Nullstellen im Streifen $0<\mathrm{Re}(s)<1$ liegen. Zusätzlich bewiesen ist, dass unendlich viele Nullstellen von $\zeta(s)$ auf der Geraden $\mathrm{Re}(s)=\frac{1}{2}$ liegen.