Lehrstuhl A für Mathematik
Prof. Dr. R. Stens
J. Rettemeier
J. Weiss

Aachen, den 28.01.2002

13. Übung zur Mathematik für Biologen

(Abgabe: Montag, den 04.02.2002, vor der Übung)

Aufgabe 1: Führen Sie für die angegebenen Funktionen folgendes Programm durch:

(i) Definitionsbereich D_f;
(ii) Grenzwerte an den Rändern von D_f;
(iii) Nullstellen;
(iv) relative und absolute Extrema;
(v) Skizze.

a) $f(x) = \arctan \frac{x}{x-2}$; b)* $f(x) = e^{1/x}(x+2)$.

Aufgabe 2: Zeigen Sie:

a) $\lim\limits_{x\to 0+} x^x = 1$; b)* $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} = 0$; c) $\lim\limits_{x\to 0} (\cos x)^{1/x^2} = e^{-1/2}$;

d) $\lim\limits_{x\to 3} \frac{x^2-2x-3}{x^2-4x+3} = 2$; e) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\sqrt{1+x^2}}{x} = 1$; f)* $\lim\limits_{x\to 5} \frac{x^2-3x-10}{x^2-4x-5} = \frac{7}{6}$;

g)* $\lim\limits_{x\to 0} \frac{2-2\cos x}{x \sin 2x} = \frac{1}{2}$.

Aufgabe 3:* Zeigen Sie mit Hilfe der Differentialrechnung, dass für alle $x \in \mathbb{R}^+$ gilt:

$$\arctan x + \arctan \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$$

Aufgabe 4: Sei $t \in \mathbb{R}$. Bestimmen Sie für die Funktion

$$f_t(x) = \frac{x}{t \log x - 1}$$

(i) den maximalen Definitionsbereich D_{f_t},
(ii) die Nullstellen,
(iii) das Verhalten von f_t an den Rändern des Definitionsbereiches,
(iv) relative und absolute Extremstellen.

Fertigen Sie für den Wert $t = 2$ eine Skizze von f_t an.

Lösungen (zu den nicht vorgerechneten Aufgaben von Übungsblatt 12)

Aufgabe 1: (i) $D_f = (-\infty, 1)$, $f'(x) = -\dfrac{\cos(2x)}{1-x} - 2\ln(1-x)\cdot\sin(2x)$

(ii) $D_f = \mathbb{R}$, $f'(x) = -\ln(19)\cdot 19^{\cos(x)}\cdot\sin(x)$

(iii) $D_f = \mathbb{R}\setminus\{\frac{\pi}{2}(4k+1); k\in\mathbb{Z}\}$, $f'(x) = \dfrac{-\sin(t^2x)\cdot t^2\cdot(1-\sin x)+\cos(t^2x)\cdot\cos x}{(1-\sin x)^2}$

(vi) $D_f = \cup_{n\in\mathbb{Z}}[\frac{4n-1}{2}\pi, \frac{4n+1}{2}\pi]$, $f'(x) = -\dfrac{\sin x}{2\sqrt{\cos x}}$

Aufgabe 2: (i) $D_f = \mathbb{R}^+$

(ii) $x\to\infty \Rightarrow f(x)\to 0$; $x\to 0+ \Rightarrow f(x)\to 3$

(iii) Nullstellen für $x\in\{\frac{2n+1}{2}\cdot\pi; n\in\mathbb{N}_0\}$

(iv) Relative Maxima bei $\big(\arctan(-\frac{1}{10})+2k\pi, f(\arctan(-\frac{1}{10})+2k\pi)\big)$ mit $k\in\mathbb{N}$

Relative Minima bei $\big(\arctan(-\frac{1}{10})+(2k+1)\pi, f(\arctan(-\frac{1}{10})+(2k+1)\pi)\big)$ mit $k\in\mathbb{N}_0$

Absolutes Minimum bei $\big(\arctan(-\frac{1}{10})+\pi, f(\arctan(-\frac{1}{10})+\pi)\big)$;

Absolutes Maximum: Fehlanzeige

Monotonieintervalle:
f monoton steigend auf den Intervallen $[\arctan(-\frac{1}{10})+(2k-1)\pi, \arctan(-\frac{1}{10})+2k\pi]$ mit $k\in\mathbb{N}$

f monoton fallend auf den Intervallen $[\arctan(-\frac{1}{10})+2k\pi, \arctan(-\frac{1}{10})+(2k+1)\pi]$ mit $k\in\mathbb{N}$ sowie auf dem Intervall $(0, \arctan(-\frac{1}{10})+\pi]$