Lehrstuhl A für Mathematik
Prof. Dr. R. Stens
J. Rettemeier
J. Weiss

Aachen, den 21.01.2001

12. Übung zur Mathematik für Biologen

(Abgabe: Montag, den 28.1.2001, vor der Übung)

Aufgabe 1: Geben Sie den Definitionsbereich D der folgenden Funktionen an und differenzieren Sie diese:

i) $(\ln(1-x))\cos(2x)$; ii) $19^{\cos x}$ iii) $\dfrac{\cos t^2 x}{1-\sin x}$;

iv)* $(\sin x)(1+e^{2x})$; v)* $xe^{2t\cos x}$; vi) $\sqrt{\cos x}$.

Aufgabe 2: Betrachten Sie die Funktion $f(x) = 3\, e^{\frac{-x}{10}} \cos x$ mit $x > 0$ unter folgenden Gesichtspunkten:

i) Definitionsbereich D;

ii) Grenzwerte an den Rändern von D;

iii) Nullstellen;

iv) Monotonieintervalle, relative und absolute Extrema.

Fertigen Sie anhand obiger Erkenntnisse eine Skizze der Funktion an.

Aufgabe 3: * Was sind die Unterschiede zwischen den Funktionen

$$f(x) = \frac{(x+t)^3}{(x+t)^2-1} \quad \text{und} \quad g(x) = \frac{x^3}{x^2-1}$$

in Bezug auf Definitionsbereich D, Grenzwerte an den Rändern von D, Nullstellen, Monotonieintervalle, relative und absolute Extrema sowie Asymptoten. Skizzieren sie die Graphen von f und g. (Wählen sie für die Zeichnung von f zwei typische Werte für t.)

Aufgabe 4: * Eine Zellkultur von 1000 Zellen vermehrt sich pro Stunde um 20%.

a) Geben Sie die zugehörige Wachstumsfunktion unter der Annahme an, dass sich die Zellen stetig vermehren.

b) Berechnen Sie die mittlere Wachstumsgeschwindigkeit der ersten 10 Stunden.

c) Berechnen Sie die Wachstumsgeschwindigkeit zum Zeitpunkt $1h\,5min$ und $2h\,5min$.

Lösungen zur 11. Übung:

Aufgabe 1:

(iii) $19^x \ln 19$; (iv) $15\sqrt{5}(5x-2)^2$; (v) $-\dfrac{1}{4x^2}e^{2x} + \dfrac{1}{2x}e^{2x}$;

(viii) $(\sin x)^{\cos x}\Big(\dfrac{\cos^2 x}{\sin x} - \sin x \cdot \ln(\sin x)\Big)$.

Aufgabe 2:

b) Gesucht ist t, für das $M(t) = \frac{1}{4}M(0)$ gilt. Mit $\lambda = -\frac{1}{5500}\ln(\frac{1}{2}) = \frac{\ln 2}{5500}$ aus a) ergibt das die Gleichung

$$M(0)e^{\frac{-t\ln 2}{5500}} = \frac{1}{4}M(0).$$

Nach Division durch $M(0)$ und Logarithmieren folgt $\frac{-t\ln 2}{5500} = \ln\frac{1}{4}$. Aus dieser Gleichung nach t aufgelöst erhält man $t = 11100$ Jahre für das Alter des Fossils.

c) Zu berechnen ist $M(50000)$. Man erhält, dass nur noch ein Bruchteil von 545 der ursprünglichen Menge $M(0)$ übrig bliebe.

Aufgabe 5: b)

(i) $D(f) = \mathbb{R} \setminus [-1,1]$, Nullstellen bei $\pm\sqrt{2}$.

(ii) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \infty$ und $\lim\limits_{x\to 1+} f(x) = \lim\limits_{x\to(-1)-} = -\infty$.

(iii) $f'(x) = \dfrac{x}{x^2-1}$, f ist streng monoton fallend auf $(-\infty,-1)$ und streng monoton steigend für $x \in (1,\infty)$.

(iv) Es gibt keine relativen und keine absoluten Extrema für f.