Lehrstuhl A für Mathematik
Prof. Dr. R. Stens
J. Rettemeier
J. Weiss

Aachen, den 14.01.2002

11. Übung zur Mathematik für Biologen

(Abgabe: Montag, den 21.01.2002, vor der Übung)

Aufgabe 1: Differenzieren Sie folgende Funktion $f(x)$ und geben Sie den Definitionsbereich von f und f' an:

(i)* $x \log_2 x - x$ (ii)* $e^{\sqrt{1-x^2}}$ (iii) 19^x (iv) $\sqrt{5}(5x-2)^3$

(v) $\frac{1}{4x}e^{2x}$ (vi)* $\ln(\frac{x}{x+1})$ (vii)* $e^{-4\sqrt{5x+1}}$ (viii) $\sin(x)^{\cos(x)}$.

Aufgabe 2: Durch Messung des Zerfalls radioaktiver Elemente lässt sich das Alter von Fossilien bestimmen. Das radioaktive ^{14}C hat eine Halbwertzeit von 5500 Jahren. Bezeichnet man mit $M(t)$ bzw. $M(0)$ die Masse an radioaktivem ^{14}C zum Zeitpunkt t bzw. 0 , so gilt folgendes Zerfallsgesetz $M(t) = M(0)e^{-\lambda t}$.

a)* Bestimmen Sie die noch unbekannte, positive, reelle Zahl λ des Zerfallsgesetzes von ^{14}C.

b) Wie alt ist ein Fossil, wenn man ein Viertel der ursprünglichen ^{14}C Menge $M(0)$ findet?

c) Welchen Bruchteil der ursprünglichen Menge $M(0)$ erwarten Sie bei einem vermutlich 50.000 Jahre alten Fossil?

Aufgabe 3:* Der Luftdruck l sinke nach n Höheneinheiten nach folgender Gesetzmäßigkeit:

$$l_0 := l, l_n := l_{n-1} \cdot 0,87 \quad (n \in \mathbb{N}).$$

In welchen Höhenabstandseinheiten halbiert sich der Luftdruck ?

Aufgabe 4:* Berechnen Sie für die angegebenen Funktionen die Asymptoten für $x \to \pm\infty$.

a) $f(x) = \dfrac{2x^2 + 3x - 11}{3x^3 + 1}$; b) $f(x) = \dfrac{x^2 + 2x - 5}{x + 4}$.

Aufgabe 5: Gegeben sei die Funktion $f(x) =$

a)* $e^{\frac{x}{2x-2}}$; b) $\ln(\sqrt{x^2-1})$; c) $\dfrac{(x-t)^2}{e^{|x|}}$ mit $t \in \mathbb{R}$.

i) Bestimmen Sie den Definitionsbereich $D(f)$ von f sowie die Nullstellen.

ii) Bestimmen Sie die Grenzwerte von f an den Rändern von $D(f)$.

iii) Bestimmen Sie für a) und b) die Monotonieintervalle von f.

iv) Bestimmen Sie die relativen und absoluten Extremwerte von f.

v) Fertigen Sie eine grobe Skizze von f an. Wählen Sie bei c) die Parameter $t = 1$ und $t = 2$.

Verifizieren Sie bei c), dass f bei $x = 0$ zwar stetig, aber nicht differenzierbar ist.

Lösungen (zu den nicht vorgerechneten Aufgaben von Übungsblatt 10)

Aufgabe 1:
a) $x = 1$; c) $x = 1$, $x = -1$

Aufgabe 2:
a) $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$
$x \to \pm\infty \Rightarrow f(x) \to -1$; $x \to -1 \Rightarrow f(x) \to \infty$

b)$D_f = \mathbb{R} \setminus \{-\frac{1}{2}\}$
$x \to \pm\infty \Rightarrow f(x) \to 0$; $x \to -\frac{1}{2} \Rightarrow f(x) \to -\infty$

d) $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-3\}$
$x \to \infty \Rightarrow f(x) \to -\infty$; $x \to -\infty \Rightarrow f(x) \to \infty$; $x \to -3 \Rightarrow f(x) \to 6$

Aufgabe 3:
a) (i) $D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$
$x \to \infty \Rightarrow f(x) \to \infty$; $x \to -\infty \Rightarrow f(x) \to -\infty$; $x \to 1 \Rightarrow f(x) \to \infty$

(ii) $f'(x) = \frac{x^3-3x^2}{(x-1)^3}$; f ist monoton steigend auf den Intervallen $(-\infty, 1)$ und $[3, \infty]$; f ist monoton fallend für $x \in (1, 3]$. Sattelpunkt bei $(0, 0)$, lokales Minimum bei $(3, \frac{27}{4})$. Absolute Extrema gibt es keine. Nullstelle bei $x = 0$.

Aufgabe 4: a) Zum Induktionsschritt: $(x^{n+1})' = (x^n \cdot x)' = n \cdot x^{n-1} \cdot x + x^n = (n+1)x^n$
b) (i) $D_f = \mathbb{R}_0^+$; $f'(x) = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{x+\sqrt[4]{x}}} \cdot [1 + \frac{1}{4\sqrt[4]{x^3}}]$; $D_{f'} = \mathbb{R}^+$ (also ohne 0).

Aufgabe 5: b) (i) 81 entspricht 4, 0 entspricht 1

(ii) $g(x) = \frac{1}{3}3^x + 5$

(iii) z. B. $g(1) = 5$, $g(2) = 8$, $g(3) = 14$, $g(4) = 32$.