Lehrstuhl A für Mathematik
Prof. Dr. R. Stens
J. Rettemeier
J. Weiss

Aachen, den 07.01.2002

10. Übung zur Mathematik für Biologen

(Abgabe: Montag, den 14.01.2002, vor der Übung)

Aufgabe 1: Bestimmen Sie die Nullstellen der folgenden Polynomfunktionen $f(x)$. Dabei ist $f(x) =$

a) $x^3 - x^2 + x - 1$, b)* $x^4 - x^3 - 11x^2 + 9x + 18$,
c) $x^5 - x^3 + x^2 - 1$, d)* $(x+1)(x+2)\cdots(x+999)(x+1000)$.

Aufgabe 2: Bestimmen Sie für folgende Funktionen f den maximalen Definitionsbereich $D(f)$, und berechnen Sie die Grenzwerte an den Rändern von $D(f)$ (auch $\pm\infty$); dabei ist $f(x) =$

a) $\dfrac{1-x}{1+x}$, b) $\dfrac{x-1}{(2x+1)^2}$, c)* $\dfrac{x^3-1}{x^2-1}$, d) $\dfrac{9-x^2}{x+3}$.

Aufgabe 3: Führen Sie für die angegebenen rationalen Funktionen folgendes Programm durch:

(i) Bestimmen Sie den Definitionsbereich $D(f)$ und die Grenzwerte von f an den Rändern von $D(f)$;
(ii) Bestimmen Sie f', die Monotonieintervalle, die relativen und absoluten Extremwerte und die Nullstellen von f;
(iii) Geben Sie eine grobe Skizze von f an.

a) $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2-2x+1}$, b)* $f(x) = \dfrac{x^2}{x-1}$.

Aufgabe 4:

a) Zeigen Sie mit Hilfe vollständiger Induktion und der Produktregel: $(x^n)' = nx^{n-1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

b) Differenzieren Sie folgenden Funktionen f und geben Sie den Definitionsbereich von f und f' an:

(i) $\sqrt{x + \sqrt[4]{x}}$, (ii)* $\sqrt[5]{(5x-2)^4}$, (iii)* $\dfrac{2x(3x-6)}{x^2-5x+6}$.

Aufgabe 5:

a) Zeichnen Sie die Graphen der Funktion $f(x) = c \cdot 2^x$ für $c = 1$, $c = 0,5$ und $c = 3$. Zeichnen Sie dieselben Funktionsgraphen in ein Koordinatensystem, dessen Abszisse (x-Achse) eine logarithmische Skala aufweist. Wählen Sie die Skala so, dass die Graphen Geraden ergeben.

b) Zeichnen Sie den Graphen der Funktion $f(x) = \frac{1}{3}x + 5$.

(i) Ändern Sie nun die Skala der Abszisse in eine logorithmische, $\log_3(x)$ (d.h. 1 entspricht der 3, 2 entspricht 9, usw). Welcher Zahl entspricht 81? Welche Zahl entspricht der 0?

(ii) Der Graph von f ist jetzt das logarithmisch abgetragene Bild einer Funktion g. Wie lautet die Funktionsgleichung von g?

(iii) Geben Sie mindestens vier Punkte dieser Funktion an.

(iv) Tragen Sie die unter Punkt (ii) ermittelte Funktion in ein lineares Koordinatensystem ein.

Lösungen zur 9. Übung:

Aufgabe 1 b): -9

Aufgabe 2:

a) keine Nullfolge $\Rightarrow$ Divergenz

b) mit Minoranten $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k} \Rightarrow$ Divergenz

c) mit Wurzelkriterium folgt Konvergenz

d) konvergent mit Leibnitzkriterium

e) mit Quotientenkriterium folgt Konvergenz.

Aufgabe 3:

a) divergent b) konvergent mit Grenzwert 1.

Aufgabe 4:

a) Die Reihe ist nur für $x = 0$ konvergent (sonst keine Nullfolge oder mit Quotientenkriterium).
b) Mit Quotientenkriterium konvergiert die Reihe nur für $x < 1$.

Aufgabe 5:

Bei einer vierteljährlichen Verzinsung erhält man nach einem Jahr ein Guthaben von $2,44\,DM$. Eine monatliche Verzinsung ergibt ein Guthaben von $2,61\,\text{DM}$. Bei einer kontinuierlichen Verzinsung berechnet sich das Guthaben nach einem Jahr als Grenzwert der Folge $a_n = (1 + \frac{1}{n})^n$ und entspricht somit $e\,\text{DM}$.

Weihnachtaufgabe:

Es leben mindestens zwei kluge Menschen in dem Dorf.