Lehrstuhl A für Mathematik
Prof. Dr. R. Stens
J. Rettemeier
J. Weiss

Aachen, den 17.12.2001

9. Übung zur Mathematik für Biologen

(Abgabe: Montag, den 07.01.2002, vor der Übung)

Aufgabe 1: Untersuchen Sie die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ auf Konvergenz und bestimmen Sie ihre Summe, dabei ist $a_k =$

a)* $\frac{1}{2^k}$; b) $(-1)^k \frac{4}{3^{k-2}}$; c)* $(\sqrt{3})^k$.

Aufgabe 2: Untersuchen Sie die Reihen $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ auf Konvergenz, dabei ist $a_k =$

a) $\sqrt[k]{k}$; b) $\frac{k}{k^2-3k-5}$; c) $\left(\frac{k}{k+1}\right)^{k^2}$; d) $\frac{3(-1)^k}{\sqrt{k^2+1}}$; e) $\frac{(k+1)^k}{(k!)^2}$;

f)* $(-1)^k \frac{k}{k+1}$; g)* $\frac{k^k}{2^k k!}$; h)* $\frac{k^2+1}{3^k}$; i)* $\left(\frac{k+1}{2k+1}\right)^k$.

Aufgabe 3: Sind folgende Reihen konvergent? Bestimmen Sie gegebenenfalls ihren Grenzwert!

a) $\sum_{k=1}^{\infty} (\sqrt{k} - \sqrt{k-1})$; b) $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{(k+1)^2}\right)$.

Hinweis: Betrachten Sie die Partialsummen für ein festes $n \in \mathbb{N}$ und vereinfachen Sie diese.

Aufgabe 4: Betrachten Sie folgende unendlichen Reihen:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{9n}}{27n^2} x^n$; b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{nx}}{n!} x^n$.

Wie muss $x \in \mathbb{R}$ gewählt werden, damit diese konvergieren bzw. divergieren?

Aufgabe 5: Nehmen Sie an, ein Guthaben von 1 DM werde zu (völlig unrealistischen) 100 Prozent verzinst. Nach einjähriger Verzinsung hätte man also ein Guthaben von 2 DM. Würde nun die Bank die Zinsen nicht jährlich gutschreiben, sondern halbjährlich, so hätte man nach dem 1. Halbjahr ein Guthaben von 1,50 DM, nach einem ganzen Jahr 2,25 DM (inkl. Zinseszins). Prüfen Sie diese Aussagen durch Rechnung nach. Berechnen Sie anschließend das Guthaben nach einem Jahr, wenn die Bank die Zinsen vierteljährlich bzw. monatlich berechnet (und dann jeweils mitverzinst). Was passierte, wenn das Geld *kontinuierlich* verzinst würde?

Weihnachtsaufgabe
Ich hatte meine Wanderung durch den Teutoburger Wald bei strahlendem Sonnenschein begonnen, aber ich war noch nicht lange unterwegs, als von Westen her große, schwarze Gewitterwolken aufzogen. Sie kamen rasch näher, und es fielen schon die ersten vereinzelten Regentropfen. Glücklicherweise war ganz in der Nähe eine Schutzhütte. Ich erreichte sie gerade noch, bevor das Gewitter losging, und der Regen in Sturzbächen vom Himmel kam. In der Hütte war es ziemlich dunkel. Als meine Augen sich daran gewöhnt hatten, bemerkte ich, dass ich nicht alleine war. Auf der Bank an der Rückwand saß ein kleiner, alter, aber sehr rüstig wirkender Mann. Er begrüßte mich nun freundlich. Wir kamen ins Gespräch, und es stellte sich heraus, dass mein Hüttengefährte ein emeritierter Ethnologieprofessor war. Obwohl er schon fast achtzig Jahre alt war, machte er, wie er mir sagte, noch jedes Jahr eine Forschungsreise in den Amazonasdschungel.

„Im letzten Jahr war ich in einem kleinen, völlig abgeschiedenen Dorf in der Nähe des Rio Negro“, erzählte er. „Das Besondere an diesem Dorf ist, dass seine Bewohner entweder ausgesprochen klug oder besonders dumm sind. Menschen mit einer mittleren Intelligenz fehlen völlig. Ich habe mich mit den Dörflern mehrere Wochen beschäftigt und festgestellt, dass es dort mehr junge Männer als dumme Frauen und mehr junge Frauen als dumme, junge Männer gibt.“ „Was ist mit den Kindern?“, wollte ich wissen. „Die habe ich selbstverständlich auch berücksichtigt. Mädchen zählen zu den jungen Frauen und Jungen zu den jungen Männern, war seine Antwort. Ich dachte eine Weile über das Gesagte nach, dann fragte ich ihn: „Wie viele kluge Menschen gibt es denn insgesamt in dem Dorf?“ Etwas verlegen antwortete der Ethnologe mir: „Ich weiß die Zahl nicht mehr auswendig. Sie können sich aber leicht überlegen, wie viele kluge Menschen es mindestens in dem Dorf gibt.“ Ich konnte es nicht. Wissen Sie, wie viele kluge Menschen mindestens in dem Dorf leben?

Lösungen (zu den nicht vorgerechneten Aufgaben von Übungsblatt 8)

Aufgabe 1: Für $\alpha = 1$ ist die Folge konvergent mit Grenzwert 0. Für $\alpha = -1$ ist sie konvergent mit Grenzwert -2. Für alle anderen α ist die Reihe (bestimmt) divergent.

Aufgabe2:
a) Die Folge ist monoton fallend und nach unten beschränkt. Sie konvergiert mit Grenzwert $\frac{2}{\sqrt{5}}$.

c) Die Folge ist monoton wachsend und nach oben beschränkt. Ihr Grenzwert ist 2.

d) Die Folge ist monoton steigend und nach oben beschränkt. Ihr Grenzwert ist 1.