Lehrstuhl A für Mathematik

Prof. Dr. R. Stens

J. Rettemeier

J. Weiss

Aachen, den 10.12.2001

8. Übung zur Mathematik für Biologen

(Abgabe: Montag, den 17.12.2001, vor der Übung)

Aufgabe 1: Prüfen Sie, für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ die durch

$$a_n = n\sqrt{\alpha^2 n^2 + 2\alpha} - \sqrt{n^4 + (\alpha^2+1)n^2 - 1}$$

gegebene Folge konvergiert. Geben Sie jeweils den Grenzwert an, wenn er existiert.

Aufgabe 2:
Zeigen Sie durch Anwendung des Satzes über monotone und beschränkte Folgen, daß die rekursiv definierte Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert, und berechnen Sie ihren Grenzwert a.

a) $a_1 = 1,\ a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + \frac{1}{3}\sqrt{a_n^2+1}$; b)* $a_1 = 1/2$ und $a_{n+1} = a_n^2 - a_n + 1$

c) $a_1 = 1,\ a_{n+1} = \frac{1}{4}a_n^2 + 1$; d) $a_1 = \frac{1}{2},\ a_{n+1} = a_n(2-a_n)$.

Anleitung: Bestimmen sie zunächst den möglichen Grenzwert a der Folge a_n. Nutzen sie dafür, daß a sowohl Grenzwert der Folge a_{n+1} als auch der Folge a_n sein muß. Errechnen sie sich einige Folgenglieder und stellen sie eine Vermutung auf, ob die Folge monoton fallend ist oder monoton steigend. Übersetzen sie diese Behauptung in eine Formel. Muß nach dieser Vermutung über die Monotonie der Folge der Grenzwert größer oder kleiner als jedes einzelne Folgenglied sein, damit der Satz über monotone und beschränkte Folgen anwendbar ist? Wählen sie mit Hilfe dieser Vermutungen eine mögliche obere bzw. untere Grenze für alle Folgenglieder a_n aus, mit deren Hilfe sie die Beschränktheit der Folge zeigen können. Beweisen sie alle ihre Hypothesen. Nutzen sie dabei die rekursive Definition der Folge mit der vollständigen Induktion aus. Probieren sie aus und geben nicht auf, falls der eingeschlagende Weg zu keinem Ergebnis führt, sonder versuchen sie es auf andere Weise.

Aufgabe 3: * Es seien $a, b \in \mathbb{Z}$. Wie müssen a und b gewählt werden, damit das Gleichungssystem eine, keine oder unendlich viele Lösungen besitzt?

$$\begin{array}{rcrcrcl} x & - & 3y & - & 2z & = & 5 \\ 2x & - & 3y & + & 2z & = & 13 \\ -x & + & 5y & + & (2b+2)z & = & a-5. \end{array}$$

Hinweis: Lösen Sie das lineare Gleichungssystem auf bekannte Weise, und unterscheiden Sie daraufhin die Fälle $b=1$ und $b \neq 1$.

Aufgabe 4: * Bestimmen Sie alle $x \in [-7, 3]$, für die

$$\big||9-3x| + |x+7| - 12\big| \geq 1$$

gilt.

Lösungen zur 7. Übung:

Aufgabe 2: b): $a = 2$; Jedes $N > \frac{9 \cdot 10^{-3} - 7}{3}$ erfüllt die Bedingungen. Wähle z.B. $N = \frac{9 \cdot 10^{-3} - 7}{3}$.

Aufgabe 3:

b) Die Folge hat keinen eigentlichen Grenzwert, sie strebt gegen ∞. c) $a = 0$

Aufgabe 4:

a) $a = -3$ c) $a = 1$

Aufgabe 5:

b) $a = e^2$ **c)** $a = \sqrt[4]{e}$ **f)** $\frac{1}{e}$

Aufgabe 6:

a) $a = \frac{1}{2}$ **c)** $a = \frac{1}{4}$