Lehrstuhl A für Mathematik
Prof. Dr. R. L. Stens, Tel.: 80-94532
J.Rettemeier
J.Weiss

Aachen, den 03.12.2001

7. Übung zur Mathematik für Biologen

(Abgabe: Abgabe: Montag, den 10.12.2001, vor der Übung)

Aufgabe 1*: (Eine Anwendung der Determinanten)
Es gilt der folgende Satz: Die n Vektoren $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \ldots, \underline{a}_n \in \mathbb{R}^n$, so sind sie genau dann linear unabhängig, wenn die Determinante der $m \times n$ - Matrix $A = \begin{pmatrix} \underline{a}_1 & \underline{a}_2 & \cdots & \underline{a}_n \end{pmatrix}$ ungleich 0 ist. Die Spalten der Matrix entsprechen also den Vektoren $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \ldots, \underline{a}_n$.
Prüfen Sie mit Hilfe dieses Satzes die folgenden Vektoren auf lineare Abhängigkeit:

a) $\underline{a}_1 = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \underline{a}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix},$

b) $\underline{b}_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \underline{b}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \underline{b}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix},$

c) $\underline{c}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \underline{c}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \underline{r}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \underline{c}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix},$

Aufgabe 2: Bestimmen Sie mit Hilfe der Definition der Konvergenz einer Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ den Grenzwert a, und geben Sie ein $N \in \mathbb{R}$ an, so dass $|a_n - a| < 10^{-3}$ für alle $n > N$ gilt:

a)* $a_n = \frac{n+1}{2n-1}$; b) $a_n = \frac{6n-2}{3n+7}$; c)* $a_n = \frac{n^2+n}{2n^2+1}$.

Aufgabe 3: Bestimmen Sie, falls möglich, den Grenzwert a der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$

a)* $a_n = \frac{n^2+7n-3}{2n^2-5n+6}$; b) $a_n = \frac{3n^3-1}{4n^2+2}$; c) $a_n = \frac{n+1}{2n^2+1}$; d)* $a_n = \frac{2n+(-1)^n n}{n}$.

Aufgabe 4: Bestimmen Sie den Grenzwert a der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$; dabei ist $a_n =$

a) $\left(6 + \frac{1}{n}\right)\left(\frac{n+2}{2n+1} - 1\right)$; b)* $\frac{n+1}{\sqrt{2n^2+1}}$; c) $\sqrt[n]{q}$ (mit $0 < q \le 1$)).

Aufgabe 5: Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n = (1+\frac{1}{n})^n$ konvergiert gegen die Eulersche Zahl $e = 2.718\ldots$ Bestimmen Sie den Grenzwert a der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$; dabei ist $a_n =$

a)* $\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{2n}$; b) $\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{4n}$; c) $\left(\frac{4n+1}{4n}\right)^n$; d)* $\left(\frac{4n-1}{4n-2}\right)^n$;

e)* $\left(\frac{4n-2}{4n-1}\right)^n$; f) $\left(\frac{3n+1}{3n+2}\right)^{6n+5}$.

Aufgabe 6: Berechnen Sie, falls möglich, den Grenzwert a der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

a) $a_n = \sqrt{n^2+n} - n$, b)* $a_n = \sqrt{n^2+1} - \sqrt{n^2-4n+5}$,

c) $a_n = n\left(1-\sqrt[4]{1-\frac{1}{n}}\right)$.

Lösungen (zu den nicht vorgerechneten Aufgaben von Übungsblatt 6)

Aufgabe 2: Die Knutts verfehlen ihr Ziel um ca. $0,15°$. Mit einer entsprechenden Korrektur ergibt sich eine sehr gute Annäherung an die SW-Richtung. Die Geschwindigkeit in diesem Fall beträgt etwa $80,2\ km/h$.

Aufgabe 3:

a) ja; Basis (nicht eindeutig): $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}$ b) nein c) nein

Aufgabe 4: Die Aussage gilt für alle $n \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 5:

a) $\mathbb{L} = \{-1\}$

b) $\mathbb{L} = (-1, \infty)$

c) $\mathbb{L} = (-\infty, -1)$