Lehrstuhl A für Mathematik
Prof. Dr. R. Stens
J. Rettemeier
J. Weiss

Aachen, den 26.11.2000

6. Übung zur Mathematik für Biologen

(Abgabe: Montag, den 3.12.2000, vor der Übung)

Aufgabe 1: * Eine Bevölkerung von Menschen sei in drei Altersgruppen eingeteilt. Die entsprechende Zeiteinheit t ist dann ein Drittel der maximalen Lebensdauer. $x_k(j) :=$ sei die Anzahl der Individuen der Klasse $k \in \{0, 1, 2\}$ zur Zeit j (gemessen in t). D. h., $x_0(j)$ entspricht der Anzahl Individuen der jüngsten, $x_1(j)$ entspricht der Anzahl Individuen der mittleren und $x_2(j)$ der Anzahl Individuen der ältesten Bevölkerungsgruppe zum Zeitpunkt j. Die durchschnittliche Anzahl der Nachkommen pro Person in jeder Altersgruppe sei unabhängig von j: $F_0^j = 0,6$, $F_1^j = 0,35$, $F_2^j = 0,05$, $j = 0, 1, 2, \ldots$ Die Überlebensrate einer Altersgruppe sei ebenfalls zu jedem Zeitpunkt j identisch: $P_0^j = 0,9$, $P_1^j = 0,3$, $j = 0, 1, 2, \ldots$ Beim Übergang in das folgende Zeitintervall überlebt niemand der letzten Altersgruppe.

Stellen Sie nach dem Vorbild aus der Vorlesung das zu diesen Angaben gehörige mathematische Leslie-Modell auf. Berechnen Sie den Bevölkerungszustand nach 1, 2, 3, 4 Zeitintervallen bei einer Ausgangssituation von $x_0(0) = 4000$, $x_1(0) = 9000$, $x_2(0) = 5000$. Wie groß ist jeweils die Gesamtbevölkerung? Zeichnen Sie die Bevölkerungspyramide zu 3 gewählten Zeitpunkten. Warum steht $F_0^j + F_1^j + F_2^j = 1$ nicht im Widerspruch zur Abnahme der Gesamtbevölkerung?

Aufgabe 2: Der Knutt (*Calidris canutus*) ist einer der größten Strandläuferarten. Er gehört zu den Zugvögeln. Eine Teilpopulation seiner Art fliegt nach einem Zwischenstopp im Wattenmeer im Non-Stop-Flug in ihr Winterquartier an der französischen Atlantikküste (SW-Richtung). Er erreicht dabei eine Eigen-Fluggeschwindigkeit von $80km/h$. Ein Wind aus östlicher Richtung zieht die Knutts in seine Richtung mit einer Geschwindigkeit von $5m/min$. Um wie viel Grad verfehlen die Knutts ihr Ziel? Überprüfen Sie, ob es ausreicht, den Kurs um diesen Winkel zu korrigieren, um die ursprüngliche Richtung beizuhalten. Wie schnell fliegt der Knutt auf korrigiertem Kurs?

Aufgabe 3: Überprüfen Sie, ob die gegebenen Mengen Untervektorräume des $\mathbb{R}^3$ sind und stellen Sie diese gegebenenfalls mit Hilfe einer Basis dar.

a) $\{\lambda(1, 0, 0)^t + \mu(0, 2, 1)^t \in \mathbb{R}^3; \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$

b) $\{(x_1, x_2, x_3)^t \in \mathbb{R}^3; x_1 + x_2 + x_3 = 1\}$

c) $\{(1, 1, 0)^t + \lambda(1, 0, 0)^t + \mu(0, 2, 1)^t \in \mathbb{R}^3; \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$

Aufgabe 4: Überprüfen Sie mit Hilfe vollständiger Induktion für welche $n \in \mathbb{N}$ die folgende Aussage gilt:

$$\frac{2^n}{n!} \leq \frac{6}{n+1}$$

Aufgabe 5: Bestimmen Sie alle $x \in \mathbb{R}$, die die folgenden Gleichungen bzw. Ungleichungen erfüllen:

a) $\sqrt{x^2 - 6x + 9} - 2x = 6$ b) $\sqrt{x^2 - 6x + 9} - 2x < 6$

c) $\sqrt{x^2 - 6x + 9} - 2x > 6$ d) $\sqrt{x^2 - 17} - 2x = 6$

Lösungen zur 5. Übung:

Aufgabe 1:

a) (i) $(-10, 6, -4)^t$ (ii) $(132, -24, 72)^t$ (iii) $(-77, 8, 94)^t$

b) $\underline{x} = (-\frac{8}{3}, \frac{1}{3}, \frac{8}{3})^t$

c) $c_1 = 2$, $c_2 = -1$, $c_3 = 2$

Aufgabe 4:

a) $\underline{d} = \frac{1}{4}\underline{a} + \frac{7}{4}\underline{b} - \frac{1}{4}\underline{c}$.

b) Die Vektoren $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ sind linear unabhängig.

c) Nur $\{\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}\}$ bildet eine Basis des $\mathbb{R}^3$. Diese Menge bildet somit auch ein Erzeugendensystem. Da die Menge $\{\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}, \underline{d}\}$ die Menge $\{\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}\}$ enthält, kann sie $\mathbb{R}^3$ ebenfalls erzeugen. $\{\underline{a}, \underline{b}\}$ ist kein Erzeugendensystem des $\mathbb{R}^3$

Aufgabe 6:

c) $\underline{c}_1$, $\underline{c}_2$, $\underline{c}_3$ bilden kein Erzeugendensystem des $\mathbb{R}^3$.

d) $\underline{d}_1$, $\underline{d}_2$, $\underline{d}_3$ bildet ein Erzeugendensystem des $\mathbb{R}^3$ und ist Basis des R^3.

Aufgabe 7:

b) $\{(x_1, x_2, x_3)^t \in \mathbb{R}^3; x_1 + x_2 = x_3\}$ ist ein Untervektorraum des $\mathbb{R}^3$.

Aufgabe 8:

$$D + E = E + D = \begin{pmatrix} 7 & 6 & 5 \\ -2 & 1 & 3 \\ 7 & 3 & 7 \end{pmatrix} \quad AB = \begin{pmatrix} 12 & -3 \\ -4 & 5 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \quad AC = \begin{pmatrix} 3 & 12 & 6 \\ 5 & -2 & 8 \\ 4 & 5 & 7 \end{pmatrix}$$

$$cA = \begin{pmatrix} 1 & 10 \\ 13 & 7 \end{pmatrix} \quad DA = \begin{pmatrix} 0 & 12 \\ -2 & 1 \\ 11 & 8 \end{pmatrix} \quad EA = \begin{pmatrix} -16 & 5 \\ 4 & 4 \\ -10 & 5 \end{pmatrix}$$

$$BC = \begin{pmatrix} 1 & 15 & 3 \\ 6 & 2 & 10 \end{pmatrix} \quad CD = \begin{pmatrix} 3 & 9 & 14 \\ 17 & 25 & 27 \end{pmatrix} \quad CE = \begin{pmatrix} 10 & 7 & 17 \\ 37 & 9 & 26 \end{pmatrix}$$

$$DE = \begin{pmatrix} 9 & 8 & 19 \\ -2 & 0 & 0 \\ 32 & 9 & 25 \end{pmatrix} \quad ED = \begin{pmatrix} 14 & 36 & 25 \\ 4 & -1 & 7 \\ 12 & 26 & 21 \end{pmatrix}$$