Lehrstuhl A für Mathematik
Prof. Dr. R. L. Stens, Tel.: 80-94532
J.Rettemeier
J.Weiss

Aachen, den 19.11.2001

5. Übung zur Mathematik für Biologen

(Abgabe: Abgabe: Montag, den 26.11.2001, vor der Übung)

Aufgabe 1: Gegeben seien die Vektoren $\underline{u} = (-3, 1, 2)$, $\underline{v} = (4, 0, -8)$, $\underline{w} = (6, -1, -4)$.

a) Berechnen Sie die Komponenten der Vektoren

(i) $\underline{v} - \underline{w}$ (ii) $6\underline{u} + 2\underline{v}$ (iii) $-3(\underline{v} - 8\underline{w})$ (iv) $(2\underline{u} - 7\underline{w}) - (8\underline{v} + \underline{u})$.

b) Bestimmen Sie die Komponenten des durch $2\underline{u} - \underline{v} + \underline{x} = 7\underline{x} + \underline{w}$ gegebenen Vektors $\underline{\mathrm{x}}$.

c) Berechnen Sie Skalare $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$ mit $c_1\underline{u} + c_2\underline{v} + c_3\underline{w} = (2, 0, 4)$.

Aufgabe 2*: Gegeben sind die Vektoren $\underline{a} = (2, 3, -1)$, $\underline{b} = (1, -1, 1)$, $\underline{c} = (1, 4, -2)$.

a) Sind $\underline{a}$ und $\underline{b}$ linear unabhängig?

b) Sind $\underline{a}$, $\underline{b}$ und $\underline{c}$ linear unabhängig?

c) Bestimmen Sie alle Vektoren $\underline{x} = (x_1, x_2, x_3)$, für die $\underline{a} \cdot \underline{x} = 5$, $\underline{b} \cdot \underline{x} = 2$ und $\underline{c} \cdot \underline{x} = 6$ gilt.

Aufgabe 3*: Bestimmen Sie die (ganzzahligen) Komponenten $a_1(\leq 0)$, a_2 des Vektors $\underline{a} = (a_1, a_2, -6, 4, -2)$ mit $|\underline{a}| = 9$ sowie die Komponenten b_3, b_4, b_5 des Vektors $\underline{b} = (20, -15, b_3, b_4, b_5)$, wobei dieser ein ganzzahliges Vielfaches des Vektors $\underline{a}$ sein soll.

Aufgabe 4: Gegeben sind die Vektoren $\underline{a} = (2, 3, 6)$, $\underline{b} = (1, 2, 3)$, $\underline{c} = (1, 1, 1)$ und $\underline{d} = (2, 4, 8)$.

a) Sind die Vektoren $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$, $\underline{d}$ linear abhängig? (Wenn ja, stellen Sie einen der vier Vektoren als Linearkombination der anderen dar.)

b) Sind die Vektoren $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ linear unabhängig?

c) Welche der folgenden Mengen bilden eine Basis des $\mathbb{R}^3$, und welche sind kein Erzeugendensystem des $\mathbb{R}^3$?

$$\{\underline{a}, \underline{b}\}, \quad \{\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}\}, \quad \{\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}, \underline{d}\}$$

Aufgabe 5*: Beweisen oder widerlegen Sie folgende Behauptung: Im $\mathbb{R}^3$ seien die Vektoren $\underline{x}$, $\underline{y}$, $\underline{z}$ gegeben, und je zwei von ihnen seien linear unabhängig. Dann ist $\{\underline{x}, \underline{y}, \underline{z}\}$ linear unabhängig.

Aufgabe 6:

a)* Bilden die folgenden drei Vektoren eine Basis des $\mathbb{R}^3$?
$\underline{a}_1 = (1,0,2)$, $\underline{a}_2 = (0,-1,1)$, $\underline{a}_3 = (3,-1,1)$

b)* Bilden die folgenden drei Vektoren eine Basis des $\mathbb{R}^3$?
$\underline{b}_1 = (3,1,0,)$, $\underline{b}_2 = (-1,1,1,)$, $\underline{b}_3 = (0,0,0)$

c) Bilden die folgenden drei Vektoren ein Erzeugendensystem des $\mathbb{R}^3$?
$\underline{c}_1 = (4,3,-2)$, $\underline{c}_2 = (-2,-1,-2)$, $\underline{c}_3 = (2,3,-10)$

d) Bilden die folgenden drei Vektoren ein Erzeugendensystem des $\mathbb{R}^3$?
$\underline{d}_1 = (4,3,-2)$, $\underline{d}_2 = (-2,-1,-2)$, $\underline{d}_3 = (2,3,0)$

Aufgabe 7: Welche der folgenden Mengen sind Untervektorräume des $\mathbb{R}^3$?

a)* $\{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3; x_1 = 0\}$

b) $\{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3; x_1 + x_2 = x_3\}$

c)* $\{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3; x_1 + x_2 + x_3 = 1\}$

Aufgabe 8: Gegeben seien die folgenden Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Bilden und berechnen Sie alle definierten Summen und Produkte aus *je zwei* Summanden bzw. Faktoren.

Lösungen (zu den nicht vorgerechneten Aufgaben von Übungsblatt 4)

Aufgabe 1: Die jährliche Sauerstoffproduktion eines Baumes reicht für 2 Stunden 39 Minuten.

Aufgabe 3:
a) Es müssen 600ml des Stoffes A mit 400ml des Stoffes B gemischt werden.
b) Die Konzentration von C beträgt 2,2%.

Aufgabe 6: Im Jahr 2002 leben ca. $7,4 \cdot 10^7 = 74$ Millionen Menschen in der angesprochenen Bevölkerung (genaueres Ergebnis: 74.319.244).

Aufgabe 7: Das Gemisch muss in Bezug auf die Gewichtsanteile 20% von Variation A und 80% von Variation B enthalten.