Lehrstuhl A für Mathematik

Prof. Dr. R. Stens

J. Rettemeier

J. Weiss

Aachen, den 5.11.2000

3. Übung zur Mathematik für Biologen

(Abgabe: Montag, den 12.11.2001, vor der Übung)

Aufgabe 1: * 500 ml YEPG-Medium enthalten: 10 g Glucose, 5 g Pepton, 2,5 g Hefeextrakt und 10 g Agar-Agar in Wasser gelöst. Für eine Petrischale benötigt man 20 ml Medium. Welche Mengen der zu lösenden Substanzen benötigen Sie, um 16 Petrischalen zu füllen?

Aufgabe 2: Wieviel Natriumazid wird benötigt, um 12 ml einer 0,02 % Lösung herzustellen?

Aufgabe 3: Für welche natürlichen Zahlen $n \in \mathbb{N}$ gelten die folgenden Ungleichungen:

a) $n^2 - 1 > \dfrac{(n+1)^2}{2}$ b)* $\dbinom{2n}{n} \geq 2^n$ c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} > \sqrt{n+1}.$

Aufgabe 4:
Sei m eine fest vorgegebene natürliche Zahl. Beweisen Sie mittels vollständiger Induktion für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq m$:

$$\sum_{k=m}^{n} \frac{1}{k}\binom{k}{m} = \frac{1}{m}\binom{n}{m}.$$

Aufgabe 5: Bestimmen Sie alle $x, y, z \in \mathbb{R}$, die folgende Gleichungen erfüllen:

i)* $3x + 4y + z = 23$
$x + 2z = 12$
$y + z = 8$

ii) $x + y + z = 8$
$x - y + 2z = 1$
$3x + y + 4z = 17$

iii) $2x + y + z = 8$
$x + 2y + z = 8$
$x + y + 2z = 8$

iv) $x + y - 2z = 3$
$x + 3y + z = 10$
$x + y - z = 4$
$x - y = 2$

Aufgabe 6: Bestimmen Sie alle $x \in \mathbb{R}$, die die folgenden Gleichungen erfüllen:

a)* $x^2 - 8x + 15 = 0$

b) $x^3 + 5x^2 = -6x$

c) $x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = (x+3)^2 \cdot x$

d) $x^4 + 36 = 13x^2$

e) $\sqrt{2x^2 - 1} + x = 0$

f) $\sqrt{4x^2} - x + 2 = 0$

g) $\sqrt{2x^2 + 3} + x = 0$

h) $\sqrt{x^2 - 2x + 1} + x - 1 = 0$

i)* $\sqrt{2x^2 - 1} + x = 0$

j) $\dfrac{3x^2 + 4}{3x - 2} = \dfrac{x^2 - x - 2}{x + 1}$

k) $\sqrt{4x^2} - x + 2 = 0$

Lösungen zur 2. Übung

Aufgabe 1:

c) $\dfrac{a^6 \cdot b^7}{b \cdot a^3 \cdot (a+b)^3} = \dfrac{a^3 \cdot b^6}{(a+b)^3}$

d) $\dfrac{(a \cdot a^2 \cdot a^b)^3}{b^9 \cdot (b^3)^b} = \dfrac{a^{3b+9}}{b^{3b+9}} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^{3b+9}$

Aufgabe 2: b) Lösung mit Fallunterscheidung:

1. Fall: $x \geq 2$ ergibt die Lösungsmenge $\mathbb{L}_1 = [2, \infty)$.

2. Fall: $x \in [-3, 2)$ ergibt die Lösungsmenge $\mathbb{L}_2 = [-3, 2)$.

3. Fall: $x < -3$ ergibt die Lösungsmenge $\mathbb{L}_3 = (-\infty, -3)$.

Also ist die Lösungsmenge $\mathbb{L}$ der Gleichung $|x-2| + |x+3| \geq 5$ gegeben durch $\mathbb{L} = \mathbb{L}_1 \cup \mathbb{L}_2 \cup \mathbb{L}_3 = \mathbb{R}$.

Aufgabe 3: b) $\mathbb{L} = \{-3\} \cup [3, 5]$

Aufgabe 5: b) Angenommen die Aussage

$$A(n): \quad \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$$

gilt, dann folgt:

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)}$$
$$= \frac{n}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{(n+1)^2}{(n+1)(n+2)} = \frac{n+1}{n+2}.$$

Somit kann aus der Gültigkeit von $A(n)$ auf die Gültigkeit von $A(n+1)$ geschlossen werden. Da $A(1)$ gilt, ist die Aussage $A(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ bewiesen.