### 4.3.3 Trigonometrische Funktionen

In einem rechtwinkligen $\xi$-$\eta$-Koordinatensystem betrachten wir den Kreis mit Mittelpunkt $(0,0)$ und Radius 1, den man durch die Gleichung $\xi^2+\eta^2=1$ beschreiben kann. Der Umfang dieses Kreises beträgt bekanntlich $2\pi$ mit $\pi = 3,14151\ldots$ Tragen wir vom Nullpunkt aus gegen dei $\xi$-Achse einen Winkel der Größe $\alpha°$ ab, so wird dadurch auf dem Kreis ein Bogen mit einer bestimmten Länge $x$ definiert. Der Zusammenhang zwischen $\alpha$ und der Bogenlänge $x$ ist gegeben durch

$$\frac{\alpha°}{360°} = \frac{x}{2\pi}\,. \tag{30}$$

Die Größe des Winkels kann deshalb durch $\alpha$ oder durch $x$ beschrieben werden. $\alpha$ heißt das Gradmaß des Winkels, auf Taschenrechnern meist mit DEG (= degree) bezeichnet, und $x$ heißt das Bogenmaß des Winkels, auf Taschenrechnern meist mit RAD (= radiant) bezeichnet. $x$ wird positiv genommen, wenn der Winkel durch Drehung im Gegenuhrzeigersinn erzeugt wird, im anderen Fall wird $x$ negativ genommen. Aus Gleichung (30) erhält man folgende Umrechnungstabelle zwischen Grad- und Bogenmaß:

| Bogenmaß | $0$ | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\frac{2\pi}{3}$ | $\frac{3\pi}{4}$ | $\frac{5\pi}{6}$ | $\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Gradmaß | $0°$ | $30°$ | $45°$ | $60°$ | $90°$ | $120°$ | $135°$ | $150°$ | $180°$ |

Im Folgenden verwenden wir ausschließlich das Bogenmaß.

Betrachten wir jetzt einen Winkel mit Bogenmaß $x$, so wird dadurch ein Punkt $P = (\xi,\eta)$ auf dem Einheitskreis erzeugt. Man definiert nun die Kosinus und Sinusfunktion durch

$$\xi = \cos x, \qquad \eta = \sin x.$$

In dem rechtwinkligen Dreieck $OAP$ gilt wegen $\overline{OP}=1$

$$\cos x = \overline{OA} = \frac{\overline{OA}}{\overline{OP}} = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}},$$

$$\sin x = \overline{AP} = \frac{\overline{AP}}{\overline{OP}} = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}}.$$

Unser Definitionen von cos und sin stimmen also für Winkel $< \frac{\pi}{2} = 90°$ mit denen aus der Elementargeometrie überein.

Aus der Skizze ergeben sich folgende Eigenschaften für $x, y \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{Z}$:

$$\begin{aligned}
&\cos(x+k\cdot 2\pi) = \cos x, && \sin(x+k\cdot 2\pi) = \sin x\\
&\cos(-x) = \cos x, && \sin(-x) = -\sin x\\
&\cos(x+\pi) = -\cos x, && \sin(x+\pi) = -\sin x\\
&\cos x = 0 \iff x = \tfrac{\pi}{2} + k\cdot\pi, && \sin x = 0 \iff x = k\cdot\pi\\
&\cos x = 1 \iff x = k\cdot 2\pi, && \sin x = 1 \iff x = \tfrac{\pi}{2} + k\cdot 2\pi\\
&\cos x = -1 \iff x = \pi + k\cdot 2\pi, && \sin x = -1 \iff x = -\tfrac{\pi}{2} + k\cdot 2\pi\\
&\cos(x+\tfrac{\pi}{2}) = -\sin x, && \sin(x+\tfrac{\pi}{2}) = \cos x
\end{aligned}$$

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1.$$

Wegen der ersten Eigenschaft bezeichnet man cos und sin auch als periodische Funktionen mit der Periodenlänge $2\pi$ oder kurz als $2\pi$-periodische Funktionen. Weiter gelten die so genannten Additionstheoreme

$$\begin{aligned}
\cos(x+y) &= \cos x \cos y - \sin x siny, \\
\cos(x-y) &= \cos x \cos y + \sin x siny, \\
\sin(x+y) &= \sin x \cos y + \sin y \cos x, \\
\sin(x-y) &= \sin x \cos y - \sin y \cos x.
\end{aligned}$$

Die Funktionen $\cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \cos x$ und $\sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sin x$ sind stetige Funktionen auf $\mathbb{R}$ mit $W(\cos) = W(\sin) = [-1, 1]$. Beide Funktionen sind außerdem für alle $x \in \mathbb{R}$ differenzierbar mit

$$\sin' x = \cos x, \quad \cos' x = -\sin x \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

Schließlich hat man noch die Darstellung als unendliche Reihe, nämlich

$$\begin{aligned}
\cos x &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} \qquad (x \in \mathbb{R}), \\
\sin x &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} \qquad (x \in \mathbb{R}).
\end{aligned}$$

Weiter definiert man die *Tangens-* und *Kotangensfunktion* durch

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}, \qquad \cot x = \frac{\cos x}{\sin x}.$$

$\tan x$ ist definiert für alle $x \neq \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi$, $k \in \mathbb{Z}$, und $\cot x$ ist definiert für alle $x \neq k \cdot \pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Beide Funktionen sind auf ihren Definitionsbereichen stetig und sind periodisch mit der Periodenlänge $\pi$, also

$$\tan(x + k \cdot \pi) = \tan x, \quad \cot(x + k \cdot \pi) = \cot x \qquad (x \in \mathbb{R}; k \in \mathbb{Z}).$$

Für die Ableitung erhält man mit der Quotientenregel (vgl. Satz 4.30):

$$\begin{aligned}
\tan' x &= \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x \\
\cot' x &= \left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)' = \frac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x} = \frac{-1}{\sin^2 x} = -1 - \cot^2 x
\end{aligned}$$

### 4.3.4 Arcusfunktionen

Betrachtet man die trigonometrischen Funktionen auf einem Intervall, auf dem sie streng monoton sind, dann existiert dort eine Umkehrfunktion, die so genannte *Arcusfunktion* dieser trigonometrischen Funktion.

Als Beispiel untersuchen wir die Tangensfunktion auf dem Intervall $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, d. h. $\tan : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}$. Wegen $\tan' x = \frac{1}{\cos^2 x} > 0$ ist tan ist auf $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ streng monoton wachsend. Nach Satz 4.24 existiert eine stetige Umkehrfunktion mit Definitionsbereich $\mathbb{R}$ und Wertebereich $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Diese Funktion bezeichnet man als *Arcustangensfunktion*, abgekürzt als arctan. Nach Definition der Umkehrfunktion gilt (vgl. Folgerung 4.8)

$$\begin{aligned} \tan(\arctan x) &= x, \qquad && (x \in \mathbb{R}), \\ \arctan(\tan x) &= x, \qquad && \big(x \in (-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2})\big). \end{aligned}$$

Die Ableitung kann man wieder mit der Regel für die Ableitung der Umkehrfunktion (Satz 4.34) berechnen. Setzt man $x = \tan t$, dann folgt

$$\arctan' x = \frac{1}{\tan' t} == \frac{1}{1 + \tan^2 t} = \frac{1}{1 + x^2} \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

Ausgehend von cos, sin und cot kann man in ähnlicher Weise arccos, arcsin und arccot definieren.

## Anwendung

*Höhenwachstum bei Fichten*: Das Höhenwachstum bei Fichten kann man durch die Funktion

$$h(t) = 20\Big(1 + \arctan \frac{t-30}{20}\Big) \qquad (t \geq 0)$$

beschreiben, wobei die Zeit $t$ in Jahren und die Höhe $h(t)$ in Metern gemessen wird. Wie hoch werden Fichten nach diesem Modell maximal und in welchem Alter wachsen sie am schnellsten?

Zur Beantwortung der ersten Frage betrachten wir $\lim_{t\to\infty} h(t)$. Es gilt

$$\lim_{t\to\infty} h(t) = 20\Big(1 + \underbrace{\lim_{t\to\infty} \arctan \frac{t-30}{20}}_{\frac{\pi}{2}}\Big) = 20\Big(1 + \frac{\pi}{2}\Big) \approx 51,4\,(m),$$

wobei wir $\lim_{x\to\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2}$ benutzt haben. Fichten erreichen also (nach diesem Modell) im hohen Alter eine Höhe von maximal $51,4\,m$.

Da die Wachstumsgeschwindigkeit durch die Ableitung $h'$ gegeben ist, berechnen wir zunächst die Ableitung

$$h'(t) = 20 \frac{1}{1 + \left(\frac{t-30}{20}\right)^2} \cdot \frac{1}{20} = \frac{1}{1 + \left(\frac{t-30}{20}\right)^2}.$$

Dieser Ausdruck wird genau dann maximal, wenn der Nenner den kleinsten Wert annimmt. Dies ist aber gerade für $\left(\frac{t-30}{20}\right)^2 = 0$, also für $t = 30$ der Fall. Demnach wachsen Fichten im Alter von 30 Jahren am schnellsten. Wegen $h'(30) = 1$ beträgt die Wachstumsgeschwindigkeit in diesem Alter $1 \frac{m}{Jahr}$.

Natürlich lässt sich das Maximum von $h'$ auch mit Hilfe der Differentialrechnung durch Berechnen der zweiten und dritten Ableitung bestimmen. Dies erfordert aber einen viel größeren Rechenaufwand.

## 4.4 Die Regeln von de l'Hospital

Bei der Bestimmung des Grenzwertes einer Funktion $f(x) = \frac{f_1(x)}{f_2(x)}$ etwa für $x \to a$, versucht man zunächst den Grenzwert mittels Satz 4.15 d) durch

$$\lim_{x \to a} f(x) = \frac{\lim\limits_{x \to a} f_1(x)}{\lim\limits_{x \to a} f_2(x)}$$

zu berechnen. Diese Methode versagt insbesondere dann, wenn die Grenzwerte im Zähler und Nenner beide $\pm\infty$ oder beide 0 sind. In diesen Fällen können die so genannten *Regeln von de l'Hospital* weiterhelfen.

**Satz 4.51.** *Seien $f, g : (a, b) \to \mathbb{R}$ differenzierbar auf $(a, b)$ mit $-\infty \leq a < b \leq \infty$ und $g'(x) \neq 0$ für alle $x \in (a, b)$. Ferner seien $\lim_{x \to a+} g(x) = \pm\infty$ oder $\lim_{x \to a+} f(x) = \lim_{x \to a+} g(x) = 0$. Existiert der Grenzwert $\lim_{x \to a+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, so gilt:*

$$\lim_{x \to a+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a+} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

**Bemerkung 4.52.** Ein entsprechender Satz gilt für die Grenzwerte $\lim_{x \to b-}$ und $\lim_{x \to c}$ für ein $c \in (a, b)$.

**Beispiele 4.53.** a) $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = ?$

Es gilt $\lim_{x \to 0} \sin x = \lim_{x \to 0} x = 0$ und nach den Regeln von l'Hospital folgt

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin' x}{(x)'} = \lim_{x \to 0} \frac{\cos x}{1} = 1.$$

b) $\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} =$

Wegen $\lim_{x \to 0}(1 - \cos x) = 1 - 1 = 0$ und $\lim_{x \to 0} x^2 = 0$ erhält man mit l'Hospital und Teil a)

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{(1 - \cos x)'}{(x^2)'} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{2x} = \frac{1}{2} \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} \stackrel{(a)}{=} \frac{1}{2}.$$

c) Sei $\alpha > 0$. $\lim_{x \to \infty} \frac{\log x}{x^\alpha} =?$

Es gilt $\lim_{x \to \infty} x^\alpha = \infty$. Deshalb ist

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\log x}{x^\alpha} = \lim_{x \to \infty} \frac{\log' x}{(x^\alpha)'} = \lim_{x \to \infty} \frac{x^{-1}}{\alpha x^{\alpha - 1}} = \lim_{x \to \infty} \frac{1}{\alpha x^\alpha} = 0.$$

Der Logarithmus wächst also langsamer als jede Potenz von $x$.

In den folgenden Beispielen muss man den zu untersuchenden Ausdruck erst in einen Quotienten umschreiben, bevor man die Regeln von de l'Hospital anwenden kann.

d) Sei $\alpha > 0$. $\lim_{x \to 0+} x^\alpha \log x = ?$

Wir schreiben den Ausdruck um zu

$$x^\alpha \log x = \frac{\log x}{x^{-\alpha}}.$$

Jetzt gilt $\lim_{x\to 0+} x^{-\alpha} = \infty$ und wir können l'Hospital anwenden. Es folgt

$$\lim_{x\to 0+} x^\alpha \log x = \lim_{x\to 0+} \frac{\log x}{x^{-\alpha}} = \lim_{x\to 0+} = \frac{\log' x}{(x^{-\alpha})'} = \lim_{x\to 0+} \frac{x^{-1}}{-\alpha x^{-\alpha-1}} = -\frac{1}{\alpha} \lim_{x\to 0+} x^\alpha = 0.$$

e) $\lim_{x\to 1+} x^{\frac{1}{x-1}} = ?$

Für $x > 1$ gilt:

$$x^{\frac{1}{x-1}} = \exp\left\{\frac{1}{x-1} \cdot \log x\right\} = \exp\left\{\frac{\log x}{x-1}\right\}.$$

Für den Ausdruck in den geschweiften Klammern gilt nach de l'Hospital

$$\lim_{x\to 1+} \frac{\log x}{x-1} = \lim_{x\to 1+} \frac{x^{-1}}{1} = 1,$$

und wir erhalten aus der Stetigkeit der Exponentialfunktion

$$\lim_{x\to 1+} x^{\frac{1}{x-1}} = \lim_{x\to 1+} \exp\left\{\frac{\log x}{x-1}\right\} = \exp\left\{\lim_{x\to 1+} \frac{\log x}{x-1}\right\} = e^1 = e.$$

## Die Ableitungen der elementaren Funktionen[2]

| $f(x)$ | $f'(x)$ | Differenzierbar-keitsbereich |
|---|---|---|
| $1$ | $0$ | $(-\infty, \infty)$ |
| $x^n,\ n \in \mathbb{N}$ | $nx^{n-1}$ | $(-\infty, \infty)$ |
| $x^\alpha,\ \alpha \in \mathbb{R}$ | $\alpha x^{\alpha-1}$ | $(0, \infty)$ |
| $e^x$ | $e^x$ | $(-\infty, \infty)$ |
| $a^x,\ a > 0$ | $a^x \log a$ | $(-\infty, \infty)$ |
| $\log x$ | $\frac{1}{x}$ | $(0, \infty)$ |
| $\log_a x,\ a \neq 1$ | $\frac{1}{x \log a} = \frac{1}{x} \log_a e$ | $(0, \infty)$ |
| $\sin x$ | $\cos x$ | $(-\infty, \infty)$ |
| $\cos x$ | $-\sin x$ | $(-\infty, \infty)$ |
| $\tan x$ | $\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$ | $x \neq k\pi + \frac{\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}$ |
| $\cot x$ | $-\frac{1}{\sin^2 x} = -1 - \cot^2 x$ | $x \neq k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$ |
| $\arcsin x$ | $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ | $(-1, 1)$ |
| $\arccos x$ | $-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ | $(-1, 1)$ |
| $\arctan x$ | $\frac{1}{1+x^2}$ | $(-\infty, \infty)$ |
| $\operatorname{arccot} x$ | $-\frac{1}{1+x^2}$ | $(-\infty, \infty)$ |
| $\sinh x$ | $\cosh x$ | $(-\infty, \infty)$ |
| $\cosh x$ | $\sinh x$ | $(-\infty, \infty)$ |
| $\tanh x$ | $\frac{1}{\cosh^2 x} = 1 - \tanh^2 x$ | $(-\infty, \infty)$ |
| $\coth x$ | $-\frac{1}{\sinh^2 x} = 1 - \coth^2 x$ | $x \neq 0$ |

[2]Der Vollständigkeit halber wurden auch einige Funktionen aufgenommen, die im Text nicht behandelt werden.