LEHRSTUHL A FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. E. Görlich,
Dipl.-Math. T. Heck, I. Klöcker

Aachen, den 19. November 2001

6. Übung zur Analysis I

Abgabe: Montag, 26.11.2001, bis 12 Uhr im Kasten vor Raum 155, Hauptgebäude

Hinweis Die **Sprechstunde von Prof. Görlich** ist ab sofort dienstags, 16:00–17:30 Uhr (statt montags).

Aufgabe 1 (2+2 Punkte) Beweisen oder widerlegen Sie die Konvergenz dieser Folgen mit der Definition der Konvergenz und bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert.

a) $(a_n)_{n\geq 1}$ mit $a_n := \frac{(-1)^n n}{\sqrt{n^2+n}}$.

b) $(a_n)_{n\geq 1}$ mit $a_n := \sqrt{n}(\sqrt{n+2}-\sqrt{n})$.

Aufgabe 2 (2+2+3 Punkte) Seien $(s_n)_n$ und $(t_n)_n$ reelle Folgen. Beweisen bzw. widerlegen Sie (durch Angabe eines Gegenbeispiels) jede der folgenden Behauptungen:

a) $(s_n)_{n\geq 1}$ und $(t_n)_{n\geq 1}$ konvergieren genau dann, wenn $(s_n+t_n)_{n\geq 1}$ und $(s_n-t_n)_{n\geq 1}$ konvergieren.

b) Ist $(s_{n+1}-s_n)_{n\geq 1}$ eine Nullfolge, so konvergiert $(s_n)_{n\geq 1}$.

c) $\left(s_n^2\right)_{n\geq 1}$ konvergiert genau dann, wenn $(|s_n|)_{n\geq 1}$ konvergiert.

Aufgabe 3 (3+3+4 Punkte)

a) Sei $x \in \mathbb{R}$, $x \geq 0$. Bestimmen Sie
$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x}.$$

b) Seien $a, b \in \mathbb{R}_+$. Bestimmen Sie
$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a^n+b^n}.$$

c) Sei $k \in \mathbb{N}_0$ und $0 < c \in \mathbb{R}$. Untersuchen Sie die Folge
$$(a_n)_{n\geq 1} \quad \text{mit} \quad a_n := \frac{n^k}{c^n} \quad \text{für} \quad n \in \mathbb{N}$$
auf Konvergenz und geben Sie gegebenenfalls den Grenzwert an.

Aufgabe 4 (3+3 Punkte) Bestimmen Sie für die Folgen $(a_n)_{n\geq 1}$ und $(b_n)_{n\geq 1}$ mit
$$a_n := (2+(-1)^n)\frac{n!}{n^n} \quad \text{und} \quad b_n := \mathrm{Re}\left((2-\tfrac{1}{n})i^n\right) \quad \text{für } n \in \mathbb{N}$$
alle Häufungspunkte und geben Sie für jeden Häufungspunkt eine Teilfolge an, die gegen diesen Häufungspunkt konvergiert. (Zeigen Sie auch, dass diese Folgen keine weiteren Häufungspunkte haben.)

Aufgabe 5 (2 Punkte) Geben Sie explizit eine Folge an, für die die Menge der Häufungspunkte gleich $\{n \in \mathbb{N};\ n = 2k-1 \text{ für ein } k \in \mathbb{N}\}$ ist.