LEHRSTUHL A FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. E. Görlich,
Dipl.-Math. T. Heck, I. Klöcker

Aachen, den 5. Oktober 2001

4. Übung zur Analysis I

Abgabe: Montag, 12.11.2001, bis 12 Uhr im Kasten vor Raum 155, Hauptgebäude

Hinweis Die Diskussionsstunde von Norbert Franken (Donnerstag 14:00 Uhr) findet ab dieser Woche im Raum RS 108 (Rochusstrasse 2–14) statt.

Aufgabe 1 (2+4 Punkte)

a) Zeigen Sie: Für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| < 1$ und alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt:

$$(1+x)^n \leq \frac{1}{(1-x)^n}.$$

b) Sei $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Zeigen Sie:

$$1 \leq \sqrt[n]{n} \leq 1 + \sqrt{\frac{2}{n-1}}.$$

Hinweis: Wenden Sie die binomische Formel auf $[1 + (\sqrt[n]{n} - 1)]^n$ an.

Aufgabe 2 (4 Punkte) A und B seien nichtleere Teilmengen von $\mathbb{R}$ mit $A \cup B = \mathbb{R}$ und es gelte $a < b$ für alle $a \in A$ und $b \in B$. Zeigen Sie, dass es genau eine reelle Zahl x gibt, so dass

$$a \leq x \leq b$$

für alle $a \in A$ und $b \in B$ gilt.

Aufgabe 3 (2+2+3 Punkte): Ermitteln Sie – mit Beweis – Supremum, Infimum, Maximum und Minimum (falls diese existieren) der Mengen

$$M_1 := \left\{ x;\, x = \operatorname{Re}\left((1 + \frac{i^n}{n}) i^n \right), n \in \mathbb{N} \right\},$$

$$M_2 := \left\{ x;\, x = \operatorname{Im}\left((1 + \frac{i^n}{n}) i^n \right), n \in \mathbb{N} \right\} \text{ und}$$

$$M_3 := \left\{ x;\, x = \frac{m-n}{m+n}, m, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Aufgabe 4 (2+2+4+3 Punkte):

a) Bestimmen Sie Realteil, Imaginärteil und Betrag der folgenden komplexen Zahlen:

i) $\dfrac{1}{(3+i)^2}$

ii) $\dfrac{2+\sqrt{3}i}{2-\sqrt{3}i}$

iii) $(-1+\sqrt{3}i)^n$, $n \in \mathbb{N}$

b) Zeigen Sie für $w, z \in \mathbb{C}$:

$$|w+z|^2 = |w|^2 + |z|^2 + 2\operatorname{Re}(w\bar{z})$$

Aufgabe 5 (3+3 Punkte)

a) Man zeige: Für $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$ gilt $\operatorname{Im}(z + \frac{1}{z}) = 0$ genau dann, wenn $\operatorname{Im}(z) = 0$ oder $|z| = 1$ ist.

b) Es sei $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, und $z \neq 1$ sei eine komplexe Zahl, für die $z^n = 1$ gilt. Man zeige:

$$\sum_{k=1}^{n-1} z^k = -1 \qquad \text{und} \qquad \sum_{k=1}^{n-1} (\bar{z})^k = -1.$$

Definition. Sei $w \in \mathbb{C}$, $r \in \mathbb{R}$, $r > 0$. Die Menge

$$K := \{z \in \mathbb{C};\ |z - w| = r\}$$

heißt ein *Kreis um w mit Radius r*. Der Punkt w heißt *Mittelpunkt* von K.
Für $z_0, w \in \mathbb{C}$, $w \neq 0$ heißt die Menge

$$\{z \in \mathbb{C};\ z = xw + z_0 \text{ mit } x \in \mathbb{R}\}$$

eine *Gerade in* $\mathbb{C}$.

Aufgabe 6 (5+2 Punkte)

a) Es seien $a, c \in \mathbb{R}$ und $b \in \mathbb{C}$ mit $b\overline{b} > ac$ und

$$M = \{z \in \mathbb{C};\ az\bar{z} + 2\operatorname{Re}(bz) + c = 0\}\,. \tag{*}$$

Man zeige:
Wenn $a \neq 0$, so ist M ein Kreis in der Gaußschen Zahlenebene mit Mittelpunkt $-\overline{b}/a$. Welchen Radius hat M?

Ist $a = 0$, so ist M eine Gerade. Geben Sie sie in obiger Form an.

b) Nun sei M ein beliebiger Kreis oder eine beliebige Gerade in $\mathbb{C}$. Zeigen Sie, dass man M durch $(*)$ mit geeignet gewählten $a, c \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{C}$ beschreiben kann.

Aufgabe 7 (3+2 Punkte)

a) Beweisen Sie:
Drei paarweise verschiedene komplexe Zahlen z_1, z_2, z_3 liegen genau dann auf einer Geraden in $\mathbb{C}$, wenn $\dfrac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1} \in \mathbb{R}$ gilt.

b) Skizzieren Sie die Menge

$$\{z \in \mathbb{C};\ |z + i| = |z - 2|\}$$

in der Zahlenebene.